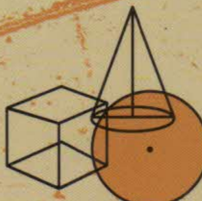
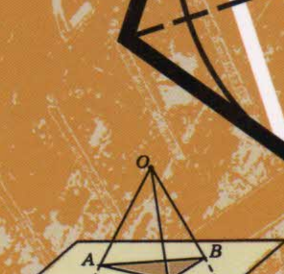
ҚОҒАМДЫҚ-ГУМАНИТАРЛЫҚ БАҒЫТ

ГЕОМЕТРИЯ





10

МЕКТЕП БАСПАСЫ

ГЕОМЕТРИЯ

Жалпы білім беретін мектептің
қоғамдық-гуманитарлық бағытындағы
10-сыныбына арналған оқулық

Өңделіп, толықтырылған үшінші басылымы

*Қазақстан Республикасының Білім және ғылым
министрлігі бекіткен*

Алматы "Мектеп" 2014

УДК 373.167.1(075.3)
ББК 22.151я72
Г94

Авторлары:
В. Гусев, Ж. Қайдасов, И. Бекбоев, Ә. Қағазбаева

Шартты белгілер:

— параграф ішіндегі тапсырма

| — міндетті емес материалдар мен тапсырмалар

* — күрделілігі жоғары есептер

Г94 **Геометрия.** Жалпы білім беретін мектептің қоғамдық-гуманит. бағытындағы 10-сыныбына арналған оқулық / В. Гусев, Ж. Қайдасов, И. Бекбоев, Ә. Қағазбаева. — Өнд., толықт. 3-бас. — Алматы: Мектеп, 2014. — 80 б., сур.

ISBN 978—601—07—0032—1

Г $\frac{4306020502-113}{404(05)-14}$ 39(1)—14

УДК 373.167.1(075.3)
ББК 22.151я72

ISBN 978—601—07—0032—1

КІРІСПЕ

Құрметті оқушылар! Сендер төменгі сыныптарда жазықтықтағы геометрия — планиметрия бойынша базалық білім алдыңдар, енді кеңістіктегі геометрия — стереометрияны оқып-үйренесіңдер. Геометрияны жүйелі оқып-үйрену арқылы интуицияны, кеңістікте елестету мен логикалық ойлауды бағытты дамытуға болады. Ерте заманнан бері геометрия адамдарға практикалық есептерді шешуге көмектесіп келеді.

Бұл ұсынылып отырған оқу курсына тән ерекшелік — оның практикалық бағыттылығы. 10-сыныпқа арналған курс үш тараудан тұрады. Бірінші тарау стереометрия аксиомалары мен олардың қарапайым салдарларына арналған.

Оқу курсында түзулер мен жазықтықтардың параллельдігі мен перпендикулярлығы қарастырылатын екінші тарау басты және негізгі орын алады. Координаталар мен векторлар туралы III тарауда геометрияның кейінірек дамыған әдістері қарастырылған. Тараулар параграфтарға бөлінген. Әр параграфта теориялық материалдар мен есептер және бақылау сұрақтары берілген. Олар параграфта қарастырылған негізгі ұғымдар мен белгілеулерді еске түсіруден басталады. Теорияның ең маңызды деген тұжырымдары теорема түрінде қарастырылған. Аксиомалар, теоремалар мен олардың салдарлары, сонымен қатар кеңістіктік фигуралардың маңызды белгілері мен қасиеттерінің тұжырымдамасы, басқа да көңіл аударуды қажет ететін сөйлемдер ерекшеленіп берілген.

Оқулықта келтірілген суреттер мен сызбалар геометрияны игеруде үлкен рөл атқарады. Теоремалардың дәлелдемелері және есептердің шығарулары міндетті түрде сызбалар мен суреттерді қарастыруды қажет етеді. Аксиомаларды, анықтамаларды, теоремалардың дәлелдемелерін және геометриялық есептерді шешудің мәнін жете түсіну үшін қарастырылатын фигураны көз алдына елестетіп, көрнекті түрде сипаттап, содан кейін салып көрсетуге тырысыңдар.

Математика, соның ішінде геометрия — табиғатты танып білу мен дұрыс ой қорыту қабілетін қалыптастыруда таптырмайтын құрал. Терең білім алуда көрсеткен талпыныс пен табандылықтарың сендерге кеңістік әлемінде еркін жүзуге мүмкіндік береді.

I тарау. ТҮЗУЛЕР МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫҢ ПАРАЛЛЕЛЬДІГІ

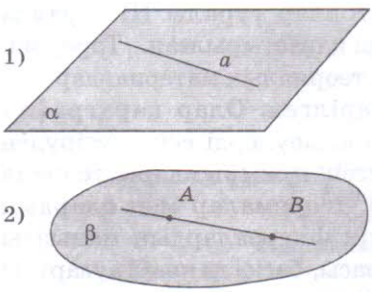
§ 1. Стереометрия аксиомалары

Геометрияның жазықтағы фигуралардың (жазық фигуралардың) қасиеттерін зерттейтін бөлімі *планиметрия* деп аталған болатын. Геометрияның кеңістіктегі фигуралардың (кеңістіктік фигуралардың) қасиеттерін зерттейтін бөлімі *стереометрия* деп аталады.

Стереометрия — гректің *стерео* — дене және *метрия* — өлшеу деген сөздерінен құралған, яғни *денені өлшеу* деген мағынаны білдіреді. Стереометрия құрылыс, архитектура, машина жасау, космонавтика және ғылым мен техниканың тағы басқа көптеген салаларында кеңінен қолданылады.

Кеңістікте *нүкте*, *түзу* және *жазықтық* қарапайым әрі *негізгі фигуралар* болып саналады. Олар анықтамасыз қабылданады.

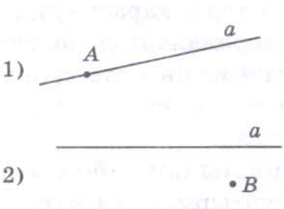
Планиметрияда бір ғана жазықтық қарастырылып, барлық фигуралар осы жалғыз жазықтықта зерттелді. Ал стереометрияда кеңістікте орналасқан жазықтықтар саны көп. Үстелдің не қабырғаның тегіс беті, тынық көлдегі судың беті т.с.с. жазықтық туралы түсінік береді. Тек олар шектелген. Ал геометриялық фигура ретінде жазықтықты барлық жаққа бірдей созылып жатқан шексіз деп елестету керек.



1-сурет

Бізді қоршаған ортада түзулер мен жазықтықтардың бейнелері туралы түсінік беретін нәрселер әр кез табылады.

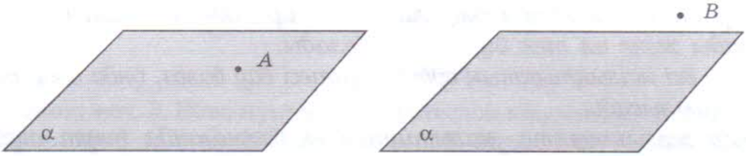
Суретте жазықтықты параллелограммен (1,1-сурет) немесе кез келген облыс түрінде (1,2-сурет) бейнелейміз. Жазықтықтарды көбінесе грек алфавитінің әріптерімен α, β, γ т.с.с. белгілейміз.



2-сурет

Ал түзулерді планиметриядағыдай латынның кіші әріптерімен немесе түзудің екі нүктесіне сәйкес латынның екі бас әрпімен белгілейміз. 1-суретте α мен β жазықтықтары және a мен AB түзулері бейнеленген. Түзудің екі жаққа да шексіз екені, ал біз оның тек шектелген бөлігін ғана бейнелейтініміз белгілі. Сол сияқты жазықтық та шексіз, біз оның бөлігін шектеп бейнелейміз.

Нүктенің берілген түзуде жатуы да (2,1-сурет), жатпауы да (2,2-сурет) мүмкін. Егер нүкте түзуде жатса, онда түзу нүкте арқылы



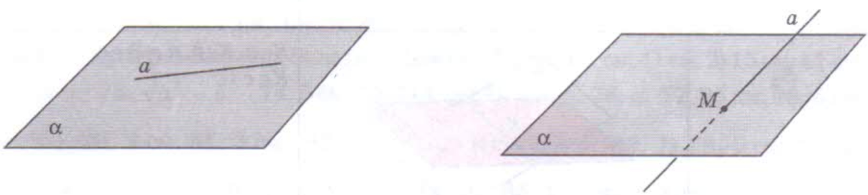
1) 2)

3-сурет

өтеді деп те айтамыз. Осы сияқты нүктенің жазықтықта жатуы да (3,1-сурет), жатпауы да (3,2-сурет) мүмкін. Егер A нүктесі α жазықтығында жатса, онда жазықтық A нүктесі арқылы өтеді деп те айтылады және $A\in\alpha$ деп белгіленеді. Ал $B\notin\alpha$ жазуы B нүктесі α жазықтығында жатпайды дегенді білдіреді.

Егер түзудің әрбір нүктесі жазықтықта жататын болса, түзу жазықтықта жатады немесе жазықтық түзуден өтеді дейміз. a түзуі α жазықтығында жатады дегенді қысқаша $a\subset\alpha$ белгісі арқылы жазамыз. 4,1-суреттегі a түзуі α жазықтығында жатыр.

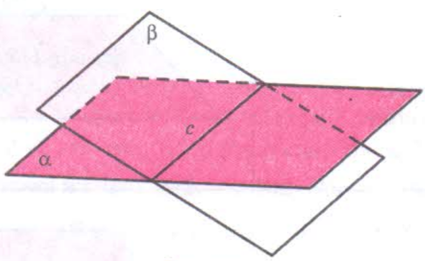
Егер түзу мен жазықтықтың тек бір ғана ортақ нүктесі болса, түзу мен жазықтық қиылысқан дейміз. 4,2-суретте a түзуі мен α жазықтығы M нүктесінде қиылысқан ($M=a\cap\alpha$).



1) 2)

4-сурет

Егер екі жазықтықтың ортақ нүктелері тек берілген түзудің нүктелерінен тұрса, онда олар осы түзу бойымен қиылысқан дейміз. α мен β жазықтықтары c түзуі бойымен қиылысса, оны қысқаша $\alpha\cap\beta=c$ деп жазады (5-сурет).



5-сурет

Планиметриядағы сияқты кеңістікте де нүктелердің, түзулердің және жазықтықтардың кейбір қасиеттері дәлелдеусіз қабылданады және *аксиомалар* деп аталады.

Аксиома грек сөзі, ол — қарастырылатын теорияда дәлелдеусіз алынған шындық дегенді білдіреді.

Мынадай стереометрия аксиомаларын енгіземіз.

A_1. *Кеңістіктегі екі нүкте арқылы бір ғана түзу жүргізуге болады.*

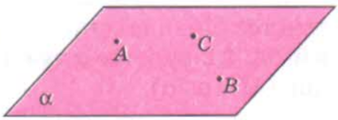
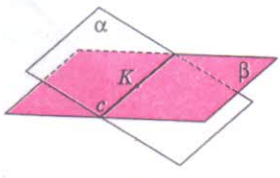
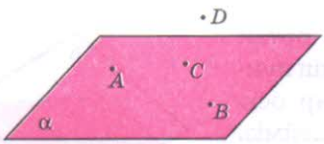
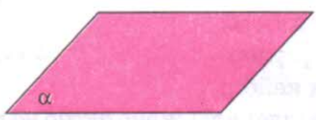
A$_2$. *Бір түзуде жатпайтын үш нүкте арқылы жазықтық жүргізуге болады және ол тек біреу ғана болады.*

A$_3$. *Егер екі жазықтықтың ортақ нүктесі бар болса, онда олар түзу бойымен қиылысады.*

A$_4$. *Бір жазықтықта жатпайтын ең болмағанда төрт нүкте бар болады.*

A$_5$. *Кеңістіктегі кез келген жазықтықта планиметрия аксиомалары орындалады (1-кесте).*

1-кесте

Аксиомалар	Сызба	Жазылуы
A_1		$A \in a$, $B \in a$, a түзуі жалғыз ғана
A_2		A, B, C нүктелері бір түзуде жатпайды, $A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha$. α — жалғыз ғана жазықтық
A_3		$K \in \alpha$, $K \in \beta$, $\alpha \cap \beta = c$. $K \in c$
A_4		$A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, $D \notin \alpha$.
A_5		α — кез келген жазықтық. Бұл жазықтықта планиметрия аксиомалары орындалады.

Стереометрия аксиомаларын қолданып, логикалық пайымдаулар көмегімен басқа қасиеттердің ақиқаттығы анықталады.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Стереометрия нені зерттейді?
2. Стереометрия аксиомаларын айтып беріңдер.
3. а) Түзуді; ә) жазықтықты анықтау үшін ең аз дегенде қанша нүкте керек?
4. Үш нүкте арқылы қанша жазықтық жүргізуге болады? Жауабын түсіндіріңдер.
5. Үш нүкте арқылы шексіз көп жазықтық жүргізу үшін олар қалай орналасуы қажет?
6. Егер үшбұрыш екі жазықтыққа да ортақ болса, онда бұл жазықтықтар қалай орналасқан?

§ 2. Стереометрия аксиомаларының салдарлары

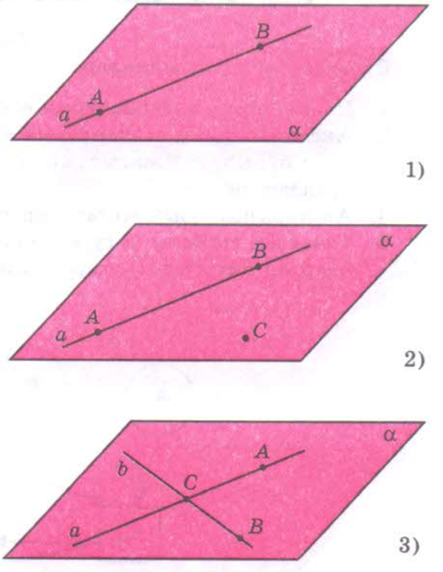
Бұл параграфта қарастырылатын салдарлардың алдағы уақытта алатын орны ерекше. Олар аксиомалардан тікелей шығарылады. Дегенмен олардың дәлелдемелері логиканы қатаң сақтай отырып, сәйкес аксиомаларға және бұрын дәлелденген теоремаларға сүйеніп, дәлелдеменің әрбір қадамын қалай жүргізуге болатынын көрсету мақсатында келтірілген.

1-салдар. *Егер түзудің екі нүктесі бір жазықтықта жатса, онда түзу тұтастай сол жазықтықта жатады.*

Дәлелдеу. Шындығында, a түзуінің α жазықтығымен ортақ екі A және B нүктелері бар дейік (6,1-сурет). Сонда α жазықтығында A және B нүктелері арқылы бір ғана түзу өтеді (аксиома A_5). Егер бұл түзу a түзуімен беттеспейді десек, онда A және B нүктелері арқылы екі түзу өтетін болып шығады. Бұл A_1-аксиомаға қайшы. Демек, a түзуі α жазықтығында жатады.

2-салдар. *Түзу және онда жатпайтын нүкте арқылы тек бір ғана жазықтық жүргізуге болады.*

Дәлелдеу. C нүктесі a түзуінде жатпайтын нүкте болсын (6,2-сурет). a түзуінің бойынан A және B нүктелерін алайық. A, B және C нүктелері бір түзуде жатпайды. A_2-аксиома бойынша бұл нүктелер арқылы жалғыз ғана α жазықтығы өтеді. a түзуі мен α жазықтығының ортақ екі нүктесі A мен B бар. Сондықтан дәлелденген 1-салдарға сәйкес a түзуі α жазықтығында жатады. Сонымен, α жазықтығы a түзуі және C нүктесі арқылы өтеді. Дәлелдеу керегі де осы болатын.



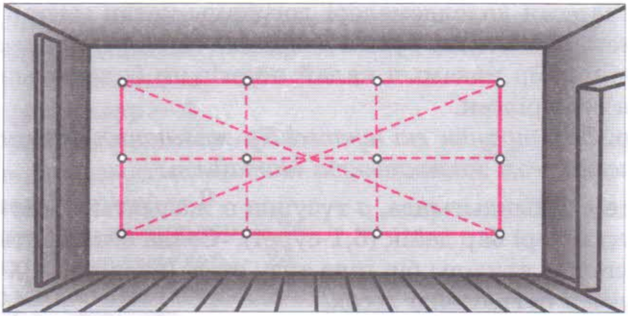
6-сурет

3-салдар. *Қиылысқан екі түзу арқылы тек бір ғана жазықтық жүргізуге болады.*

Дәлелдеу. a мен b — қиылысқан түзулер, ал олардың қиылысу нүктесі C болсын (6,3-сурет). a және b түзулерінен сәйкесінше A және B нүктелерін аламыз. A, B, C үш нүкте арқылы жалғыз ғана α жазықтығы өтеді. Бұл — берілген a, b түзулерінен өтетін жазықтық.

(2- және 3-салдарларда жазықтықтың тек бар болуын ғана дәлелдейміз.)

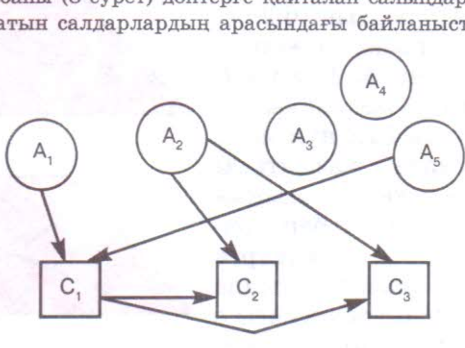
Ескерту. Жазықтықтың 1-салдарда сипатталған қасиеті практикада жиі қолданылады. Мысалы, тік қабырғаның тегіс сыланғанын тексеру үшін қабырғада әр түрлі бағытта жіптер керіледі (7-сурет). Екі нүкте (шеге) арқылы өтетін түзу (жіп) қабырғаны (жазықтық) тұтас жанай жатуы керек.



7-сурет

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Планиметрия аксиомаларын еске алып, қайталаңдар.
2. Аксиомалардың салдарларын айтыңдар.
3. Егер бұрыш екі жазықтыққа да ортақ болса, бұл жазықтықтар қалай орналасқан?
4. Аяқтарының ұзындықтары әр түрлі үш аяқты орындық шайқала ма?
5. Төмендегі сызбаны (8-сурет) дәптерге қайталап салыңдар. Аксиомалар мен олардан шығатын салдарлардың арасындағы байланысты анықтаңдар.

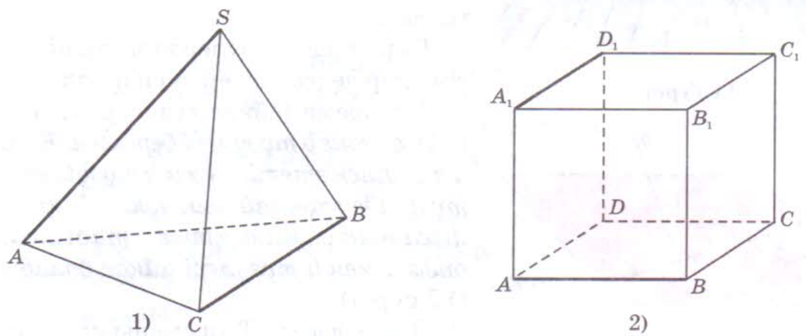


8-сурет

§ 3. Кеңістіктегі екі түзудің өзара орналасуы

Планиметрияға қарағанда кеңістікте екі түзудің өзара орналасу жағдайлары көбірек болады. Бұл кеңістіктегі әр түрлі екі түзу арқылы осы түзулерді қамтып өтетін жазықтықты әр кез жүргізуге болмайтынымен, басқаша айтқанда, кеңістіктегі әр түрлі екі түзу әр кез бір жазықтықта жата бермейтінімен байланысты.

Мысалы, тетраэдрдің (9,1-сурет) AS және BC қырлары бір жазықтықта жатпайды, сондай-ақ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (9,2-сурет) кубының AB және A_1D_1 қырлары да бір жазықтықта жатпайды.



9-сурет

Анықтама. *Кеңістіктегі бір жазықтықта жатпайтын екі түзу* ***айқас түзулер*** *деп аталады* (10,1-сурет).

Осы сияқты, егер екі кесінді айқас түзулерде жатса, онда оларды айқас кесінділер дейміз.

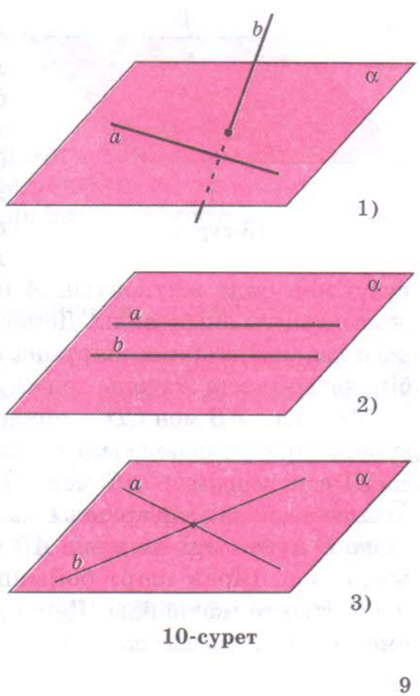
Анықтама. *Бір жазықтықта жататын және өзара қиылыспайтын екі түзу* ***параллель түзулер*** *деп аталады* (10,2-сурет).

Анықтама. *Тек бір ғана ортақ нүктесі бар екі түзу* ***қиылысқан түзулер*** *деп аталады* (10,3-сурет).

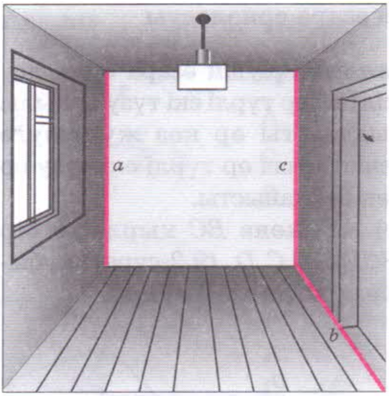
Бұл үш жағдайды басқаша да алуға болады.

1. Түзулердің ортақ нүктесі бар. Онда олар бір жазықтықта жатады. Бұл — қиылысқан түзулер.

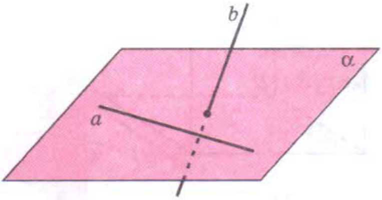
2. Екі түзудің ортақ нүктесі жоқ.



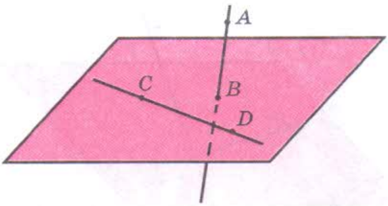
10-сурет



11-сурет



12-сурет



13-сурет

Онда олар — параллель (егер бір жазықтықта жатса) немесе айқас түзулер (егер бір жазықтықта жатпаса).

Бөлменің қабырғалары мен төбесін мысалға алып, мына үш жағдайды көрсетуге болады: a түзуі b түзуімен айқас және c түзуімен параллель, ал b мен c түзулері қиылысады (11-сурет).

Түзулердің кеңістіктегі параллельдігі жазықтықтағы сияқты белгіленеді.

Параллель түзулерде жатқан кесінділер де (сәулелер де) параллель.

1-теорема (айқас түзулердің белгісі). ***a және b түзулері берілген. Егер a түзуінен өтетін және b түзуімен a түзуінде жатпайтын нүктеде қиылысатын α жазықтығы табылса, онда a мен b түзулері айқас болады*** (12-сурет).

Дәлелдеу. Теореманы кері жору арқылы дәлелдейміз. Түзулер айқас болса, олар бір жазықтықта жатпайды. Кері тұжырым, a мен b түзулері бір жазықтықта жатады дегенді білдіреді. Бұл жазықтық α жазықтығымен беттесуі тиіс. Шындығында, бұл жазықтықта a түзуі және b түзуі жатады, демек, теорема шартында айтылған b түзуіне тиісті A нүктесі де осы жазықтықта жатады. Бірақ a түзуі мен онда жатпайтын A нүктесі (2-салдар бойынша) жалғыз жазықтықты анықтайды. Демек, b түзуі тұтасымен α жазықтығында жатады, бұл теорема шартына қайшы. Сондықтан a мен b түзулері бір жазықтықта жатады деп алуымыз қате. Теорема дәлелденді.

Мысал. AB мен CD — айқас түзулер (13-сурет). AC мен BD түзулері параллель бола ма? Қиылыса ма?

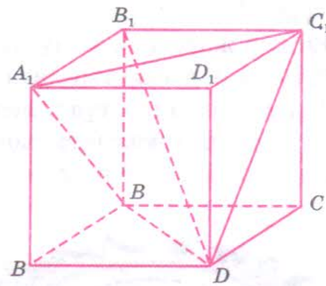
Шешуі. Егер AC мен BD түзулері параллель болса немесе қиылысса, онда олар арқылы жазықтық жүргізуге болады. Онда A, B, C және D нүктелері де және AB мен CD түзулері де осы жазықтықта жатар еді. Бірақ шарт бойынша AB мен CD түзулері (айқас) бір жазықтықта жатпайды. Демек, AC мен BD түзулері параллель де емес, қиылыспайды да.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Кеңістікте екі түзу қалай орналасуы мүмкін?
2. Параллель түзулер мен айқас түзулердің ұқсастығы неде? Ал айырмашылығы ше?
3. Параллель түзулерде жатқан кесінділер туралы не айтуға болады?
4. Айқас түзулердің қандай белгісін білесіңдер?
5. Екі түзу үшінші түзуді қиып өтеді. Алғашқы екі түзу қалай орналасулары мүмкін?
6. Жазықтықта жататын түзу жүргізіңдер. Осы түзуді қиып өтетін, бірақ берілген жазықтықта жатпайтын екі түзу жүргізіңдер.

Есептер

О



14-сурет

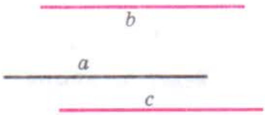
1. 14-суреттен 1) кубтың қырлары арқылы өтетін; 2) жақтарының диагональдары мен кубтың диагоналі арқылы өтетін айқас түзулерді көрсетіңдер.
2. $ABCD$ — тетраэдр (үшбұрышты пирамида). Оның AB және CD қырлары параллель ме? DA және BC түзулері қиылыса ма?
3. AB мен CD түзулері параллель. AC мен BD түзулері айқас бола ала ма? Қиылыса ма?
4. α және β жазықтықтары c түзуі бойымен қиылысқан. a түзуі α жазықтығында жатыр және $\alpha \cap \beta = A$. a және c түзулері өзара қалай орналасқан?
5. Кірпіш құйған кезде иленген балшықты қалыпқа салады да (ол — қақпақсыз қорап тәріздес ыдыс), артығын сызғышпен, сызғышты қалыптың қарама-қарсы екі жиегінің бойымен жылжыта отырып, сылып алып тастайды. Сонда кірпіштің беті тегіс болып шығады. Неге? Жауабын түсіндіріңдер.

§ 4. Түзулердің параллельдік белгісі

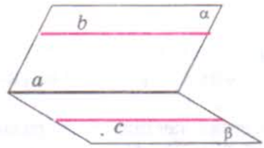
2-теорема (үшінші түзуге параллель екі түзу туралы теорема). ***Егер екі түзудің әрқайсысы үшінші бір түзуге параллель болса, онда бұл екі түзу өзара параллель болады.***

Д ә л е л д е у. $b \parallel a$, $c \parallel a$ болсын (15, 1-сурет). b мен c түзулері де параллель екенін дәлелдейік. Анықтамаға сәйкес, 1) b мен c түзулерінің бір жазықтықта жататынын; 2) b мен c түзулерінің қиылыспайтынын дәлелдейміз. Кері жорып, түзулер бір жазықтықта жатпайды деп есептейік.

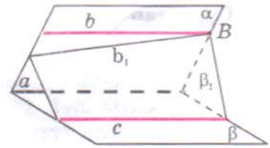
a мен b түзулері жататын жазықтықты α деп, ал a мен c түзулері жататын жазықтықты β деп белгілейік.



1)



2)



3)

15-сурет

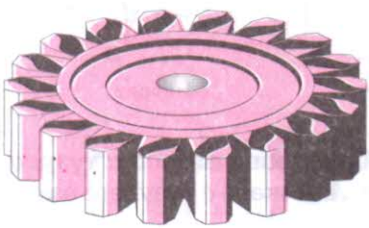
α және β жазықтықтары әр түрлі (15, 2-сурет). b түзуінің бойынан қандай да бір B нүктесін белгілеп, c түзуі мен B нүктесі арқылы β_1 жазықтығын жүргіземіз. Ол α жазықтығын b_1 түзуі бойымен қиып өтеді (15, 3-сурет).

b_1 түзуі β жазықтығын қимайды. Егер қиятын болса, қиылысу нүктесі a түзуінде жатуға тиіс, себебі b_1 түзуі α жазықтығында жатыр. Екінші жағынан, ол нүкте c түзуінің де бойында жатуы тиіс, өйткені b_1 түзуі β_1 жазықтығында жатыр. Бірақ a және c түзулері параллель болғандықтан, b_1 түзуі мен β жазықтығы қиылыспайды.

b_1 түзуі α жазықтығында жатқандықтан, a түзуін қимайды және ол a-ға параллель, демек, ол параллельдік аксиомасы бойынша b түзуімен беттеседі. Сонымен, b түзуі b_1 түзуімен беттесе отырып, c түзуімен бір жазықтықта (β_1 жазықтығында) жатады және оны қимайды. Демек, b және c түзулері — параллель. Теорема дәлелденді.

Дәлелденген теорема кеңістіктегі түзулердің параллельдігінің белгісі болады.

Параллель екі түзу әрқашан бір жазықтықта жатады. Ал үш немесе одан да көп түзулер ше? Олар бір жазықтықта жатпауы да мүмкін. Мысалы, тісті цилиндрлік шестерняның (тісті дөңгелек) барлық қырлары (16, 1-сурет) параллель түзулерде жатыр, бірақ бір жазықтықта жатпайды. Төрт қырлы етіп сүргіленген тақтайлардың қырлары туралы да, салынып жатқан үйлердің вертикаль колонналары туралы да (16, 2-сурет) осыны айтуға болады.



1)

2)

16-сурет

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Параллель үш түзу туралы теореманы айтып беріңдер.
2. Қоршаған ортадан параллель түзулерге мысалдар келтіріңдер.

Есептер

О

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. 1) Кубтың параллель қырларын көрсетіп, белгілеңдер. Кубтың бір қырына параллель қанша қыры бар? 2) Айқас түзулерде жататын қырларды көрсетіңдер. Бір қырымен айқас болатын қанша қыры бар? Белгілеңдер.
7. $SABCD$ — табаны квадрат болатын пирамида. K, M, N, P, R нүктелері сәйкесінше AS, DS, AD, SB, AB қабырғаларының орталары. а) $KM \parallel BC$; ә) $PR \parallel MN$ болатынын дәлелдеңдер.
8. $DABC$ пирамидасы берілген. BD, CD, AC және AB қырларының орталары сәйкесінше M, N, Q, R деп белгіленген. Егер $AD=12$ см, $BC=14$ см болса, $MNQR$ төртбұрышының периметрін табыңдар.
9. $ABCD$ мен ABC_1D_1 трапецияларының AB табандары ортақ және трапециялар әр түрлі жазықтықтарда жатыр. $CD \parallel C_1D_1$ болатынын дәлелдеңдер.
10. MN кесіндісі бойымен қиылысқан кеңістікте $ABCD$ және $PQRS$ трапециялары берілген. MN — олардың ортақ орта сызығы, ал AD, BC, PS, QR — табандары. $AD=10$ см, $QR = 7$ см, $MN = 8$ см деп алып, BC мен PS-ты табыңдар.

Ш

11. Айқас екі a мен b түзулері және оларда жатпайтын C нүктесі берілген. C нүктесінен өтетін және a мен b түзулерімен қиылысатын c түзуін салыңдар.

§ 5. Түзу мен жазықтықтың параллельдігі

Кеңістікте түзу мен жазықтықтың үш түрлі орналасу жағдайы белгілі:

1) түзу жазықтықта жатады;
2) түзу жазықтықты қиып өтеді, яғни түзу мен жазықтықтың бір ғана ортақ нүктесі бар;
3) түзу мен жазықтық қиылыспайды.

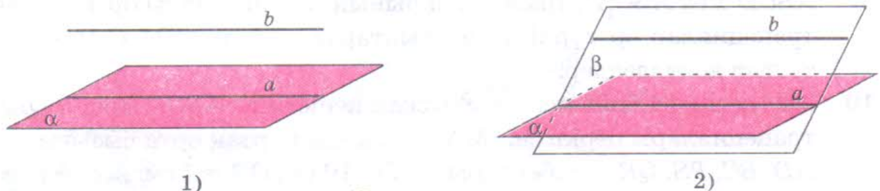
Анықтама. *Түзу мен жазықтық қиылыспаса, олар* ***параллель*** деп аталады.

Егер a түзуі мен α жазықтығы параллель болса, онда оны $a \parallel \alpha$ немесе $\alpha \parallel a$ деп белгілейді және a түзуі α жазықтығына параллель немесе α жазықтығы a түзуіне параллель деп айтамыз.

Көптеген стереометрия есептерін шығарғанда, түзу мен жазықтықтың параллельдігін тек анықтамаға сүйеніп қана негіздеу қиынға түседі. Мұндай жағдайда түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісіне сүйенген дұрыс. Осындай параллельдіктің бір белгісі мына теоремамен берілген.

3-теорема (түзу мен жазықтықтың параллельдігінің белгісі). ***Егер жазықтыққа тиісті емес түзу осы жазықтықтағы қандай да бір түзуге параллель болса, онда бұл түзу сол жазықтықтың өзіне де параллель болады.***

Д ә л е л д е у. α — берілген жазықтық, a — осы жазықтықта жатқан түзу, b — α жазықтығына тиісті емес және a-ға праллель түзу болсын (17, 1-сурет). a мен b түзулері арқылы β жазықтығын жүргіземіз (17, 2-сурет). α және β жазықтықтары a түзуі бойымен қиылысады. Егер b түзуі α жазықтығын қиып өтсе, онда қиылысу нүктесі a түзуінде жатар еді. Бірақ бұлай болуы мүмкін емес, себебі a және b түзулері шарт

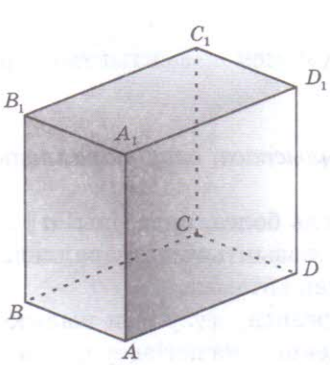


17-сурет

бойынша параллель түзулер. Сонымен, b түзуі α жазықтығын қиып өтпейді, демек, ол α жазықтығына параллель. Теорема дәлелденді.

4-теорема. ***Егер b түзуі α жазықтығына параллель және b түзуі арқылы өтетін β жазықтығы α жазықтығымен қиылысса, онда қиылысу сызығы берілген b түзуіне параллель*** болады (17, 2-сурет).

3-теореманың және 17, 2-суретінің көмегімен 4-теореманы жеңіл дәлелдеуге болады. Оны өздерің дәлелдеп көріңдер.



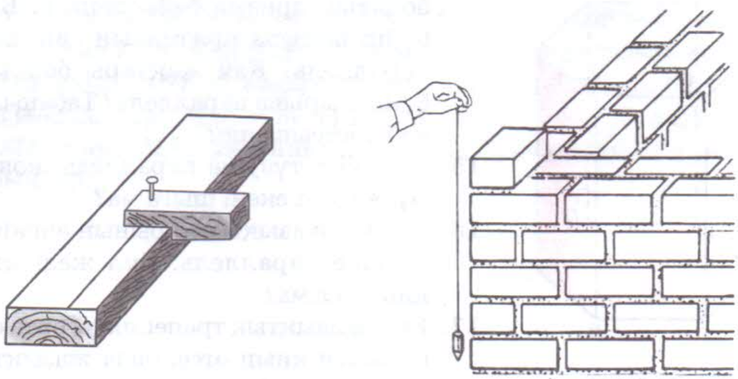
18-сурет

Егер кесінді жазықтыққа параллель түзудің бөлігі болса, онда ол *жазықтыққа параллель* деп аталады.

Мысалы, тікбұрышты параллелепипедтің әрбір қыры оның екі жағының жазықтықтарына параллель (18-сурет). Төрт қырлы рейканың жағында рейсмус арқылы жүргізілген түзу оның үш жағының жазықтықтарына параллель (19, 1-сурет). Кірпіш қалаушы қабырға жазықтығын жүк ілінген жіпке параллель етіп қалайды (19, 2-сурет).

Бидай орғыш комбайнның горизонтальды қалбағайы (мотовило) жұмыс кезінде орналасу жағдайын аздап өзгерткенмен, жалпы жағдайда жер бетіне параллель жылжып отырады. Сүңгуір қайық тұрақты терендікте түзу сызық бойымен жүріп отырса, онда ол теңіз беті жазықтығына параллель жылжиды. Осының бәрі түзу мен жазықтықтың параллельдік қатынасының материалдық модельдері.

Мысал. Берілген жазықтықта жатпайтын нүкте арқылы осы жазықтыққа параллель түзу жүргізу керек. Осындай қанша түзу жүргізуге болады?



1) 2)

19-сурет

Шешуі. Берілген β жазықтығында b түзуін жүргіземіз. Берілген A нүктесі және b түзуі арқылы α жазықтығын жүргізейік (стереометрия аксиомаларының 2-салдары). α жазықтығында A нүктесі арқылы b түзуіне параллель a түзуін жүргіземіз. a түзуі β жазықтығына параллель, сондықтан ол ізделінді түзу (3-теорема). Осындай шексіз көп түзулер жүргізуге болады.

Сұрақтар мен тапсырмалар

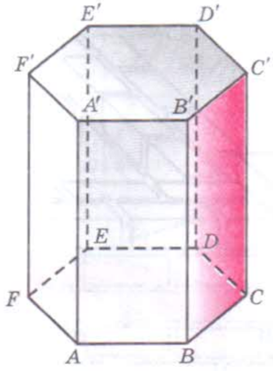
1. Кеңістікте түзу мен жазықтық қалай орналасулары мүмкін?
2. Түзу мен жазықтық қандай жағдайда параллель болады?
3. Кесінді мен жазықтық қандай жағдайда параллель болады?
4. Түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісін есте сақтаңдар. Теореманы дәлелдеңдер.
5. Берілген жазықтыққа параллель түзу арқылы өтетін және осы жазықтықпен қиылысатын жазықтық туралы теорема (4-теорема) қайталап, есте сақтаңдар.

Есептер

О

12. 18-суретте тікбұрышты параллелепипед бейнеленген. Табанына параллель түзулерде жатқан барлық қырларды көрсетіңдер.

13. Тікбұрышты параллелепипедтің жоғарғы табанының диагоналі төменгі табанының жазықтығына параллель болатынын дәлелдеңдер (18-сурет).



20-сурет

14. 20-суретте табаны дұрыс алты бұрыш болатын призма бейнеленген. Боялған бүйір жағына призманың қай қырлары параллель? Қай жақтары боялған BB' бүйір қырына параллель? Табанының BC қабырғасына ше?

15. a түзуі b түзуіне параллель және $b \parallel \alpha$. Бұдан $a \parallel \alpha$ екені шыға ма?

16. α мен β жазықтықтарының әрқайсысы a түзуіне параллель. Бұл жазықтықтар қиылыса ма?

17. Егер жазықтық трапецияны орта сызығы бойымен қиып өтсе, онда жазықтықтың трапеция табандарына параллель болатынын дәлелдеңдер.

18. A және B нүктелері α жазықтығында жатады, ал O нүктесі жатпайды. OA және OB кесінділерінің орталары арқылы өтетін түзу α жазықтығына параллель болатынын дәлелдеңдер.

19. α жазықтығы AB мен AC кесінділерін олардың орталары K және P нүктелерінде қиып өтеді. BC кесіндісі α жазықтығына параллель екенін дәлелдеңдер. ABC мен AKP үшбұрыштарының аудандарының қатынастары қандай?

20. Берілген нүкте арқылы берілген түзуге қанша параллель жазықтық жүргізуге болады?

Ш

21. Айқас екі түзудің біреуі арқылы екіншісіне параллель болатын тек бір ғана жазықтық өтетінін дәлелдеңдер.

22. Кеңістіктегі $ABCD$ төртбұрышында (төртбұрыштың төбелері бір жазықтықта жатпайды) қабырғалардың орталары кесінділермен тізбектеле қосылған. Алынған төртбұрыштың параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

23. Егер жазықтықты қиятын түзуге екінші түзу параллель болса, онда бұл түзудің де жазықтықты қиып өтетінін дәлелдеңдер.

§ 6. Жазықтықтардың параллельдігі

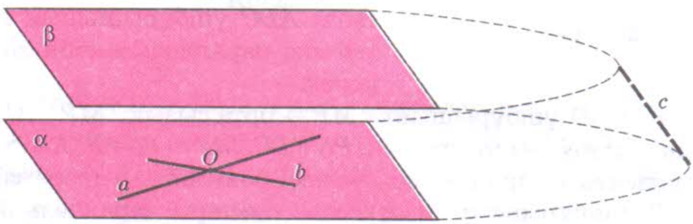
Екі жазықтықтың өзара орналасуына байланысты сұрақтарды қарастырайық. A_3-аксиомаға сәйкес, егер екі жазықтықтың ортақ нүктесі бар болса, онда олар түзу бойымен қиылысады. Бұдан, екі жазықтық қиылысса, онда олар түзу бойымен қиылысады немесе қиылыспайды, яғни олардың ортақ нүктелері болмайды деген қорытынды шығады.

Анықтама. *Қиылыспайтын екі жазықтық* ***параллель жазықтықтар*** деп аталады.

α және β жазықтықтары параллель болса, ол $\alpha \parallel \beta$ деп белгіленеді.

5-теорема (жазықтықтардың параллельдігінің белгісі). ***Егер бір жазықтықта жатқан, қиылысқан екі түзудің әрқайсысы екінші жазықтыққа параллель болса, онда бұл жазықтықтар параллель болады.***

Дәлелдеу. α жазықтығында жататын және O нүктесінде қиылысатын a және b түзулері берілсін. Олардың әрқайсысы β жазықтығына параллель болсын (21-сурет). Сонда $\alpha \parallel \beta$ болатынын дәлелдейміз. Керісінше α мен β жазықтықтары c түзуі бойымен қиылысады деп есептейік. Шарт бойынша $a \parallel \beta$ және $b \parallel \beta$. Сондықтан β жазықтығында жатқан c түзуімен a және b түзулері қиылыса алмайды. Бұл



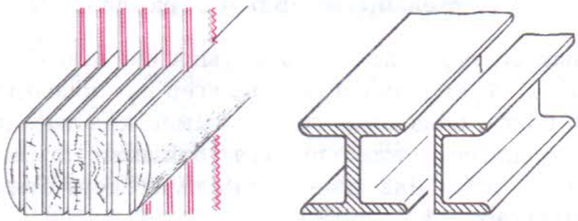
21-сурет

түзулер бір жазықтықта, яғни α жазықтығында жатыр және $a \parallel c$, $b \parallel c$. Сонда қиылысқан екі түзу үшінші түзуге параллель болып шығады. Бұл параллельдік аксиомасына қайшы. Алынған қайшылық біздің α және β жазықтықтары қиылысқан болсын деген жорамалымыздың қате екенін көрсетеді. Демек, α және β жазықтықтары қиылыспайды. Олай болса, олар параллель жазықтықтар. Теорема дәлелденді.

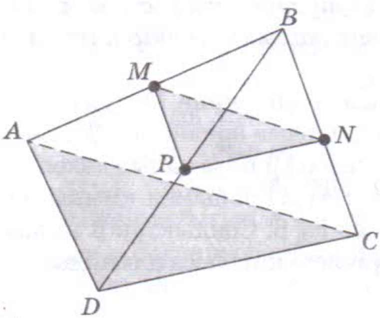
Салдар. *Егер бір жазықтықтағы қиылысқан екі түзу екінші жазықтықтағы қиылысқан сәйкес екі түзуге параллель болса, онда бұл екі жазықтық параллель болады.*

Бұл салдардың дұрыстығы 5-теоремадан тікелей шығады.

Көп қабатты үйлердің қабаттарындағы жапқыштар, терезенің қосарланған әйнегі баспалдақтың сатылары параллель жазықтықтарда орналасады. Жұқа тактайлардың (фанерлердің) қыртыс-



22-сурет



23-сурет

қабаттары, бөренені тақтайларға тілетін аралар (22, 1-сурет), кірпіштің, қостаңбалы арқалықтың қарсы жақтары (22, 2-сурет), слесарь тістеуігінің қысқыштары параллель орналасады.

Мысал. ADC үшбұрышының жазықтығында жатпайтын B нүктесі берілген. BA, BC, BD кесінділерінің орталары сәйкесінше M, N, P нүктелері MNP үшбұрышының жазықтығы ADC үшбұрышының жазықтығына параллель екенін дәлелдеу керек.

Шешуі. ABD үшбұрышында MP — орта сызық, $MP \parallel AD$. BCD үшбұрышында PN — орта сызық, $PN \parallel DC$. $MP \cap PN=P$, $AD \cap DC=D$. Екі жазықтықтың параллельдік белгісі бойынша (5-теорема) MNP және ADC үшбұрыштарының жазықтықтары параллель болады. Дәлелдеу керегі осы.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Қандай жазықтықтар параллель деп аталады?
2. Екі жазықтықтың параллельдігінің белгісі туралы теореманы дәлелдеңдер.
3. Теореманың салдарын қайталап, есте сақтаңдар.
4. Екі жазықтық — параллель. Бұл жазықтықтарға қарағанда үшінші жазықтық қалай орналасуы мүмкін?

Есептер

О

24. α жазықтығының екі түзуі β жазықтығына параллель. Бұдан $\alpha \parallel \beta$ екені шыға ма?

25. Нивелирді (жер бетіндегі әр түрлі орындардың салыстырмалы биіктігін өлшейтін құрал) горизонталь бетке орнатқанда, құралды тек параллель емес екі бағытта ғана тексереді. Осылай тексеру жеткілікті ме?

26. OA, OB және OC кесінділері бір жазықтықта жатпайды. Олардың орталары арқылы өтетін жазықтықтың ABC үшбұрышының жазықтығына параллель болатынын дәлелдеңдер.

27. $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ кубының AB_1C және A_1C_1D жазықтықтарының параллеь болатынын дәлелдеңдер.

III

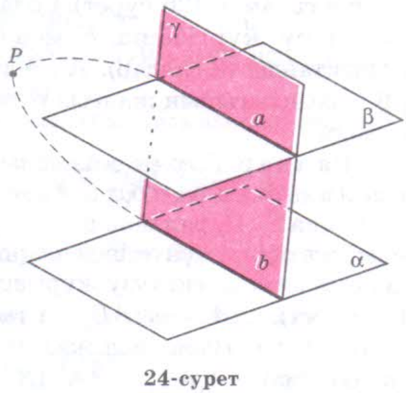
28. $\alpha \parallel \beta$. α жазықтығының әрбір түзуі β жазықтығына параллель екенін дәлелдеңдер.

***29.** α мен β параллель екі жазықтық ABC үшбұрышының BA қабырғасын D және D_1 нүктелерінде қияды, ал BC қабырғасын сәйкесінше E, E_1 нүктелерінде қияды. Егер $BD = 12$ см, $BD_1 = 18$ см, $D_1E_1 = 54$ см болса, DE кесіндісінің ұзындығы қандай?

§ 7. Параллель жазықтықтардың қасиеттері

6-теорема. ***Егер параллель екі жазықтық үшінші жазықтықпен қиылысса, онда олардың қиылысу түзулері параллель болады.***

Д ә л е л д е у. a мен b түзулері бойымен γ жазықтығы параллель α және β жазықтықтарымен қиылысады дейік (24-сурет). Сонда a мен b түзулері параллель болатынын дәлелдейік.

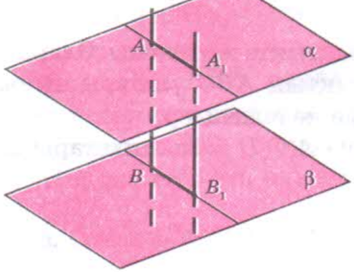


24-сурет

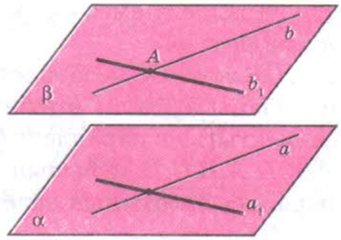
Кері жорып, a мен b параллель емес деп алайық. Сонда олар бір γ жазықтығында жатады да, қайсыбір P нүктесінде қиылысады. P нүктесі a мен b түзулеріне тиісті, демек, осы түзулер жататын α, β жазықтықтарына да тиісті. Сонда параллель α және β жазықтықтарының ортақ нүктесі бар деген қайшылыққа келдік. a мен b түзулері қиылыспайды, демек, олар — параллель. Теорема дәлелденді.

7-теорема. ***Параллель екі жазықтықтың арасындағы параллель түзулердің кесінділері тең болады.***

Д ә л е л д е у. Параллель AB және A_1B_1 кесінділерінің ұштары α және β параллель жазықтықтарында жатады дейік (25-сурет). AB және A_1B_1 түзулері арқылы өтетін үшінші жазықтық α мен β жазықтықтарын параллель түзулер бойымен қияды, яғни $AA_1 \parallel BB_1$. Екінші



25-сурет



26-сурет

жағынан, теорема шарты бойынша $AB \parallel A_1B_1$. Демек, ABB_1A_1 төртбұрышы — параллелограмм. Олай болса, $AB = A_1B_1$. Теорема дәлелденді.

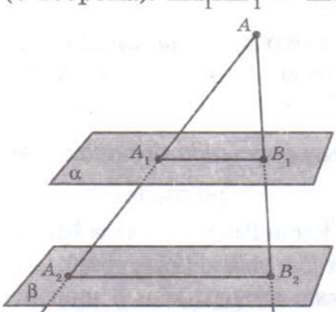
8-теорема (жазықтықтардың параллельдігі туралы). ***Жазықтықтан тыс жатқан нүкте арқылы осы жазықтыққа параллель бір ғана жазықтық жүргізуге болады.***

Дәлелдеу. α жазықтығы және одан тыс жатқан A нүктесі берілсін. A нүктесі арқылы өтіп, α-ға параллель болатын β жазықтығын жүргізу үшін, алдымен α жазықтығында жататын қиылысқан a_1, a түзулерін саламыз (26-сурет). Содан соң A нүктесінен өтетін $b_1 \parallel a_1$, $b \parallel a$ екі түзу жүргіземіз. b_1 мен b түзулері бір ғана β жазықтығын анықтайды (3-салдар). Ал 5-теореманың салдары бойынша $\beta \parallel \alpha$. β жазықтығының жалғыз ғана болатыны түсінікті. Теорема дәлелденді.

Салдар. *Егер екі жазықтықтың әрқайсысы үшінші жазықтыққа параллель болса, онда бұл берілген жазықтықтар өзара параллель болады.*

Мысал. Параллель α мен β жазықтықтарынан тыс (арасында емес) жатқан A нүктесінен оларды сәйкесінше A_1, A_2 және B_1, B_2 нүктелерінде қиятын екі түзу жүргізілген. $A_1A_2 = 2 \cdot A_1A = 12$ см, $AB_1 = 5$ см (27-сурет). AA_2 мен AB_2-ны табу керек.

Шешуі. Параллель жазықтықтардың қасиеті бойынша $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ (6-теорема). $\Delta A_1AB_1 \backsim \Delta A_2AB_2$ (екі бұрышы бойынша $\angle A$ — ортақ, $\angle AA_1B_1 = \angle AA_2B_2$, себебі A_1B_1 мен A_2B_2 паралллель, ал AA_2 — қиюшы). Үшбұрыштардың ұқсастығынан:



27-сурет

$\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{AB_1}{AB_2}$; $A_1A_2 = 2 \cdot A_1A = 12$ см, 12 см$= 2 \cdot A_1A$, $A_1A = 6$ см;

$AA_2 = A_1A + A_1A_2 = 6 + 12 = 18$ (см);

$\frac{6}{18} = \frac{5}{AB_2}$, $AB_2 = \frac{5 \cdot 18}{6} = 15$ (см).

Жауабы: $AA_2 = 18$ см, $AB_2 = 15$ см.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Егер екі параллель жазықтық үшінші жазықтықпен қиылысса, онда олардың қиылысуынан пайда болған түзулердің параллель болатынын дәлелдеңдер.
2. Параллель түзулердің параллель екі жазықтық арасындағы кесінділері тең болатынын дәлелдеңдер.
3. Параллель жазықтықтар туралы негізгі теореманы қайталап, есте сақтаңдар.
4. Салдарды қайталап, есте сақтаңдар.
5. Параллель жазықтықтар туралы теоремалардың қайсылары параллель түзулер туралы теоремаларға ұқсас?

Есептер

О

30. Параллель емес түзулердің параллель екі жазықтық арасындағы кесінділері тең бола ма?

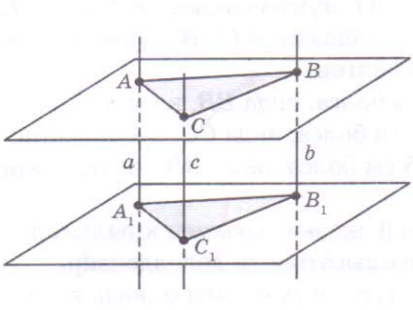
31. Параллель екі жазықтықтың бірінде жататын ABC үшбұрышының төбелерінен параллель түзулер жүргізілген. Олар екінші жазықтықты A_1, B_1, C_1 нүктелерінде қиып өтеді. ABC және A_1, B_1, C_1 үшбұрыштарының теңдігін дәлелдеңдер (28-сурет).

32. α және β жазықтықтарын γ жазықтығы параллель түзулер бойымен қиып өтеді. Бұдан α мен β параллель деуге бола ма?

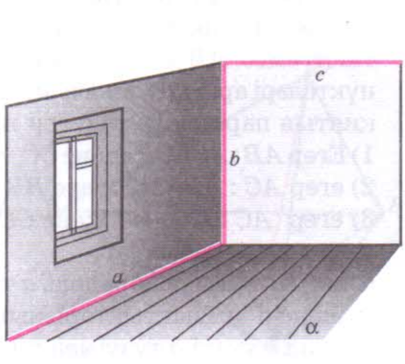
33. 29-суретте бөлме бейнеленген. Еден жазықтығы α-мен белгіленіп, үш түзу бояумен ерекшеленген. a түзуі α жазықтығында жатады, b түзуі α жазықтығын қияды, ал c түзуі α-ға параллель. Суреттегі басқа түзулер (жазықтықтар) α жазықтығына қарағанда қалай орналасқан?

34. а) Параллелепипедтің қарама-қарсы жақтарының; ә) призма табандарының параллель екенін дәлелдеңдер.

35. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. B_1C_1, C_1D_1, BC, A_1B_1 қырларының орта нүктелері сәйкесінше K, L, M, N. AA_1 түзуі 1) BCC_1; 2) BDD_1; 3) BDC_1; 4) KLM; 5) CKN; 6) LMN жазықтығына параллель бола ма?



28-сурет



29-сурет

III

36. Параллель α және β жазықтықтарынан тыс (арасында емес) жатқан S нүктесінен осы жазықтықтарды сәйкесінше A, B, C және A_1, B_1, C_1 нүктелерінде қиып өтетін үш түзу жүргізілген. $SA=a$, $AA_1=b$, $B_1C_1=c$ екені белгілі. BC-ны табу керек.

Қосымша есептер

37. MN кесіндісінің ұштары α жазықтығының әр түрлі жақтарында орналасқан. MN кесіндісінің ортасы — K нүктесі α жазықтығында жатыр. M мен N нүктелері арқылы өтетін параллель түзулер α жазықтығымен сәйкесінше M_1, N_1 нүктелерінде қиылысады. $M_1K=KN_1=4$ см, $MM_1=3$ см. NN_1 және MN кесінділерінің ұзындықтарын табыңдар.

38. $ABCD$ — квадрат. E нүктесі квадрат жазықтығынан тыс жатыр. Егер $AB=8$ см және A_1, B_1, C_1, D_1 нүктелері сәйкесінше AE, BE, CE, DE кесінділерінің орталары болса, онда $A_1B_1C_1D_1$ төртбұрышының периметрін табыңдар.

39. α — жазықтық, ал O — жазықтықтан тыс нүкте. O нүктесінен α жазықтығын A және B нүктелерінде қиятын екі түзу жүргізілген. OA және OB кесінділерінің орталары сәйкесінше C және D нүктелері. 1) CD мен AB кесінділері бір-біріне қарағанда қалай орналасқан? 2) CD кесіндісі мен α жазықтығы қалай орналасқан? 3) $AB=6$ см деп алып, CD кесіндісінің ұзындығын табыңдар; 4) $CD=5$ см деп алып, AB кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

40. MN кесіндісі берілген α жазықтығынан тыс жатыр. MN кесіндісінің ортасы — K. M, K, N нүктелері арқылы параллель түзулер жүргізілген, олар α жазықтығын сәйкесінше M_1, K_1, N_1 нүктелерінде қиып өтеді. 1) Егер $MM_1=4$ см, $NN_1=8$ см болса, KK_1 кесіндісінің ұзындығын; 2) егер $MM_1=4$ см, $KK_1=6$ см болса, NN_1 кесіндісінің ұзындығын; 3) егер $NN_1=10$ см, $KK_1=8$ см болса, MM_1 кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

41. AB кесіндісінің A ұшы берілген α жазықтығына тиісті, ал B ұшы тиісті емес. AB кесіндісінің бойынан C нүктесі алынған. C және B нүктелері арқылы α жазықтығына сәйкесінше C_1, B_1 нүктелерінде қиятын параллель түзулер жүргізілген.
1) Егер $AB:AC=2:1$ және $CC_1=3$ см болса, онда BB_1 кесіндісінің;
2) егер $AC:AB=1:2$ және $BB_1=8$ см болса, онда CC_1 кесіндісінің;
3) егер $AC:AB=1:3$ және $CC_1=5$ см болса, онда BB_1 кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

42. α жазықтығына паралель a түзуі β жазықтығымен қиылысады. α және β жазықтықтарының қиылысатынын дәлелдеңдер.

43. $a \parallel \alpha$, ал b түзуі a түзуімен қиылысады. b түзуі мен α жазықтығы өзара қалай орналасуы мүмкін?

II тарау. ТҮЗУЛЕР МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫҢ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЛЫҒЫ

§ 8. Кеңістіктегі түзулердің арасындағы бұрыш. Түзулердің перпендикулярлығы

Кеңістіктегі бұрыштың анықтамасы да жазықтықтағы тәрізді беріледі.

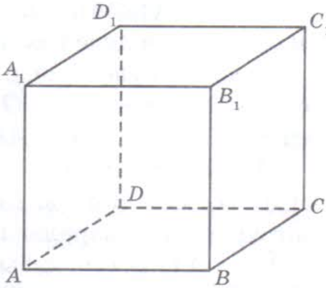
Анықтама. *Кеңістікте **бұрыш** деп төбелері ортақ екі сәуледен және олармен шектелген жазықтықтың бір бөлігінен (осы сәулелер жататын) тұратын фигураны айтады.*

Параллель түзулердің арасындағы бұрыштың шамасы нөлге тең деп алынады.

Анықтама. *Кеңістіктегі **қиылысқан екі түзудің арасындағы бұрыш** деп осы түзулердің қиылысу нүктесі ортақ төбелері болатын сәулелерімен жасалған бұрыштардың ішіндегі кішісін айтады.*

Анықтама. *Кеңістікте тік бұрыш жасап қиылысқан екі түзу **перпендикуляр түзулер** деп аталады.*

Мысалы, егер $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб болса, онда BC, B_1C_1, DC, D_1C_1 түзулерінің әрқайсысы CC_1 түзуіне перпендикуляр (30-сурет) .

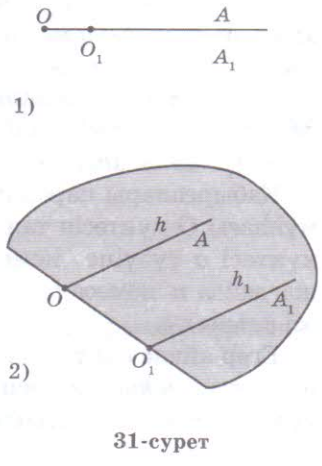


30-сурет

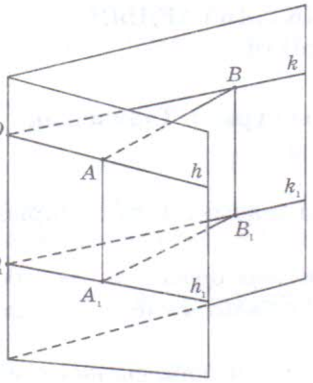
Егер қиылысқан екі кесінді өзара перпендикуляр түзулерде жатса, онда оларды перпендикуляр дейміз. Қиылысқан екі кесіндінің арасындағы бұрыш деп оларды сәйкес қамтып тұрған түзулердің арасындағы бұрышты айтамыз. Жазықтықтағы сияқты, егер кеңістіктегі екі сәуленің бірі екіншісін қамтып тұрса немесе төбелерінен өтетін түзуге қарағанда бір жарты жазықтықта жататын болса, онда олар *бірдей бағытталған* (бағдарлас) деп аталады (31, 1, 2-суреттер).

9-теорема. ***Қабырғалары бағыттас екі бұрыш өзара тең болады.***

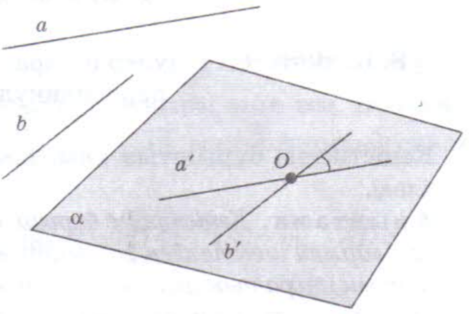
Дәлелдеуі. Төбелері O нүктесінде болатын h, k сәулелері төбелері O нүктесінде болатын h_1, k_1 сәулелерімен бағыттас болсын.



31-сурет



32-сурет



33-сурет

Егер берілген бұрыштар бір жазықтықта жатса, онда теореманың дәлелдеуі планиметриядан белгілі.

Берілген бұрыштар бір жазықтықта жатпасын (32-сурет). Олардың тең болатынын дәлелдейік.

h және k сәулелерінде A және B нүктелерін белгілейік. h_1 және k_1 сәулелеріне сәйкесінше $O_1A_1=OA$ және $O_1B_1=OB$ кесінділерін өлшеп салып, OO_1, AA_1, BB_1, AB және A_1B_1 кесінділерін жүргізейік.

OAA_1O_1 төртбұрышы — параллелограмм, сондықтан $AA_1 = OO_1$ және $AA_1 \parallel OO_1$. Сол сияқты $BB_1 = OO_1$ және $BB_1 \parallel OO_1$. Демек, ABB_1A_1 төртбұрышы — параллелограмм. Бұдан $AB=A_1B_1$. Сонда өзара тең AOB мен $A_1O_1B_1$ (үш қабырғасы бойынша) үшбұрыштарының сәйкес AOB мен $A_1O_1B_1$ бұрыштары тең. Теорема дәлелденді.

Салдар. *Сәйкес параллель түзулермен жасалған бұрыштар өзара тең.*

Енді айқас түзулер арасындағы бұрыш түсінігін анықтайық.

a мен b айқас түзулер болсын (33-сурет). Кеңістіктен O нүктесін алып, ол арқылы a мен b түзулеріне параллель сәйкесінше a' және b' түзулерін жүргізейік.

Анықтама. ***a және b айқас түзулерінің арасындағы бұрыш*** *деп оларға параллель, сәйкес қиылысқан a' және b' түзулерінің арасындағы бұрышты атайды.*

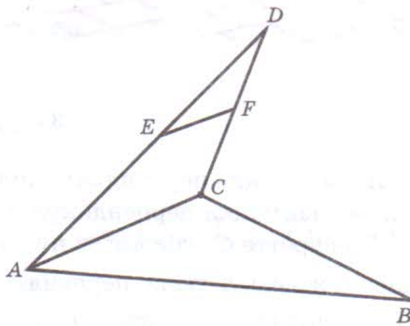
Қабырғалары параллель бұрыштар тең болғандықтан, анықтама мұндағы O нүктесін таңдаудан тәуелсіз болады. Дербес жағдайда O нүктесі a түзуіне немесе b түзуіне тиісті болуы да мүмкін. Бұл жағдайда a' немесе b' түзуі үшін сәйкес a түзуінің немесе b түзуінің өзі алынады.

Егер айқас екі түзудің арасындағы бұрыш тік бұрыш болса, онда олар *перпендикуляр* деп аталады. Егер екі кесінді перпендикуляр түзулерде жатса, онда оларды *перпендикуляр кесінділер* деп атаймыз.

Екі кесіндінің арасындағы бұрыш деп осы кесінділер жататын түзулер арасындағы бұрышты айтамыз.

Егер параллель екі түзудің біреуі қайсыбір түзуге перпендикуляр болса, онда екіншісі де сол түзуге перпендикуляр болады. Мысалы, кубтың айқас BC және DD_1 қырлары өзара перпендикуляр, себебі оларға параллель, сәйкес қиылысқан AD және AA_1 қырлары перпендикуляр (ADD_1A_1 — квадрат) (30-сурет). Осы сияқты бұл кубтың AB мен B_1C_1, AD және CC_1 қырларының жұбы да өзара перпендикуляр.

Мысал. ABC және ADC үшбұрыштары әр түрлі жазықтықтарда жатыр. ADC үшбұрышының AC табанына сәйкес орта сызығы— EF. EF және AB түзулерінің өзара орналасуын анықтап, егер $\angle ACB = 80^\circ$, $\angle B=40^\circ$ болса, осы түзулердің арасындағы бұрышты табу керек (34-сурет).



34-сурет

Шешуі. 1) AB түзуі ADC үшбұрышының жазықтығымен A нүктесінде қиылысады. A нүктесі EF түзуінде жатпайды, себебі $EF \| AC$ (үшбұрыштың орта сызығының қасиеті бойынша). Сондықтан AB мен EF түзулері — айқас түзулер. 2) $EF \| AC$. Қиылысқан AC және AB түзулерінің арасындағы бұрыш $BAC = 180^\circ - (80^\circ + 40^\circ) = 60^\circ$. 3) Айқас түзулер арасындағы бұрыш 60°-қа тең. *Жауабы:* AB мен EF айқас түзулер және олардың арасындағы бұрыш 60°.

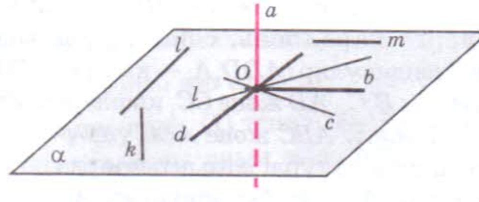
§ 9. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы

1. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығының анықтамасы. Жазықтыққа перпендикуляр түзулер, дәлірек айтсақ, жазықтыққа перпендикуляр кесінділер, күнделікті өмірде вертикаль тұрған бағандар (олар жер бетіне перпендикуляр), вертикаль бағытта ілінген шам (ол төбеге перпендикуляр) тәріздес болып келеді. Мысалы, есіктің вертикаль босағасы еденге перпендикуляр, есіктің ашық, жабықтығына қарамастан, оның төменгі еденге жақын қыры босағаға перпендикуляр (35, 1-сурет). Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығын анықтау үшін де осындай қасиеттер ескеріледі.

Анықтама. *Егер түзу жазықтықтағы түзулердің кез келгеніне перпендикуляр болса, онда* ***түзу жазықтыққа перпендикуляр*** деп аталады.

Бұл жағдайда жазықтық та түзуге перпендикуляр болады: $a \perp \alpha$ және керісінше $\alpha \perp a$ (35, 2-сурет).


1)



2)

35-сурет

Жазықтыққа перпендикуляр түзуде жататын кесінді мен сәуле де осы жазықтыққа перпендикуляр.

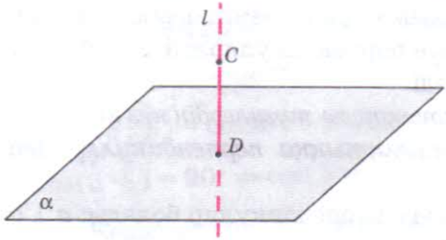
36-суретте C — берілген нүкте, α — берілген жазықтық. C нүктесінен α жазықтығына перпендикуляр l түзуі жүргізілген, $D = l \cap \alpha$. CD кесіндісі — C нүктесінен α жазықтығына түсірілген перпендикуляр. D нүктесі — түсірілген перпендикулярдың табаны.

2. Перпендикуляр және көлбеу.

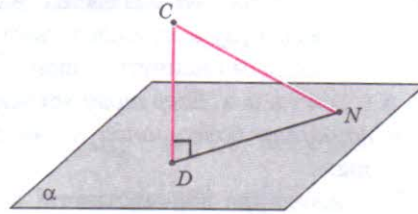
Анықтама. *Бір ұшы жазықтықта жататын және жазықтыққа перпендикуляр болмайтын кесіндіні* ***жазықтыққа көлбеу*** деп атайды (37-сурет).

Кесіндінің жазықтықтағы ұшын ***көлбеудің табаны*** деп атайды. *Ал нүктеден жазықтыққа жүргізілген перпендикуляр мен көлбеудің табандарын қосатын кесіндіні* ***көлбеудің проекциясы*** дейді.

37-суретте C нүктесінен α жазықтығына түсірілген CD перпендикуляры, CN көлбеуі және оның жазықтықтағы проекциясы DN кесіндісі бейнеленген. 36-, 37-суреттердегі CD кесіндісінің ұзындығы C нүктесінен α жазықтығына дейінгі қашықтықты береді. CD перпендикуляры CN көлбеуінен қысқа болады, яғни $CD < CN$. Шындығында, CDN тікбұрышты үшбұрышында CD катеті CN гипотенузасынан



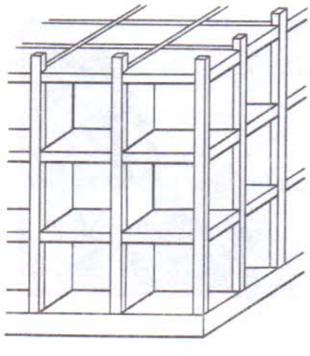
36-сурет



37-сурет

қысқа. Сөйтіп, берілген нүктеден жазықтыққа түсірілген перпендикуляр осы нүктеден жазықтыққа жүргізілген көлбеулердің кез келгенінен қысқа болады. Сондықтан нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтыққа мынадай анықтама береміз.

Анықтама. *Нүктеден жазықтыққа дейінгі* ***қашықтық*** *деп нүктеден жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың ұзындығын айтады.*



38-сурет

3. Перпендикулярдың маңыздылығы туралы.

Жазықтыққа түсірілген перпендикуляр нүктеден жазықтыққа дейінгі ең қысқа қашықтық болуымен қатар басқа да маңызды рөлдерді атқарады.

Перпендикулярдың маңызды қасиеттерінің бірі — жазықтықтың перпендикулярға қарағанда симметриялы орналасуында. Мұны қалай түсінеміз? Жазықтықта жатқан барлық сәулелер онымен өзара тең бұрыштар, яғни тікбұрыштар құрайды, ал көлбеу үшін олай емес. Оны дұрыс орнатылған есіктен де байқаймыз. Егер есіктің жиегі вертикаль болмаса, онда ол дұрыс ашылмай, еденге тіреліп қалады. Бізді жан-жағымыздан перпендикулярлар қоршап тұр деп те айтуға болады, мысалы, орындықтың аяқтары еденге перпендикуляр, шкафтың қыры қабырғаға перпендикуляр т.с.с.

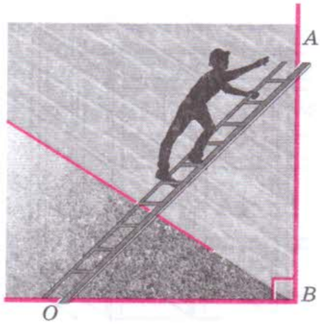
Перпендикулярдың, әсіресе, құрылыстағы рөлі ерекше: қабаттардың аралық жапқыштары ғимарат қаңқасының (үйдің негізгі каркасы) бағандарына перпендикуляр орнатылады. Көп қабатты үй салғанда, әрбір горизонталь арқалық (балка) вертикаль тіреулерге перпендикуляр болатындай етіп, алдымен қаңқасын құрастырады (38-сурет).

Болат шыбықтар темірбетонды конструкциялардың арматураларына тік бұрышпен ұстатылады т.с.с. Сонымен қатар перпендикулярдың техникадағы маңызы да зор.

Ортақ перпендикуляры бар жазықтықтардың параллель болатынын да байқаймыз. Түзулердің және жазықтықтардың перпендикулярлығы мен параллельдігі — құрылыстың маңызды элементі. Сондықтан перпендикуляр мен параллельдер туралы ілімді "құрылыс геометриясының" негіздері деп де атауға болады.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Кеңістіктегі қандай түзулер перпендикуляр түзулер деп аталады?
2. Қандай жағдайда түзу жазықтыққа перпендикуляр болады?
3. Жазықтыққа түсірілген перпендикуляр мен жазықтыққа жүргізілген көлбеудің айырмашылығы неде?
4. Жазықтыққа перпендикуляр кесіндіге анықтама беріңдер.



39-сурет

5. Қандай жағдайда кесінді (сәуле) жазықтыққа перпендикуляр болады?
6. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықты қалай табамыз?
7. 39-суреттегі перпендикуляр, көлбеу және оның проекциясын көрсетіңдер.

Есептер

О

44. α жазықтығы берілген. A нүктесінен оған $AB = 20$ см және $AC = 15$ см екі көлбеу жүргізілген. Бірінші көлбеудің жазықтықтағы проекциясы 16 см. Екінші көлбеу проекциясының ұзындығын табыңдар.

45. A нүктесінен α жазықтығына $AB = 9$ см көлбеуі және $AO = 6$ см перпендикуляры жүргізілген. Осы перпендикулярдың берілген көлбеудегі проекциясының ұзындығын табыңдар.

46. D нүктесінен β жазықтығына ұзындығы 2 см-ге тең екі көлбеу жүргізілген. Олардың арасындағы бұрыш 60°, ал проекцияларының арасындағы бұрыш 90°. D нүктесінен β жазықтығына түсірілген перпендикулярдың ұзындығын табыңдар.

47. Берілген нүктеден берілген жазықтыққа өзара 60° бұрыш жасайтын екі тең көлбеу жүргізілген. Олардың проекциялары тік бұрыш жасайды. Әрбір көлбеу мен оның проекциясы арасындағы бұрышты табыңдар.

48. Қабырғалары 13 см, 14 см, 15 см үшбұрыш берілген. Бұл үшбұрыштың жазықтығында жатпайтын M нүктесі оның қабырғаларынан 5 см қашықтықта орналасқан. M нүктесінен үшбұрыш жазықтығына түсірілген перпендикулярдың ұзындығын табыңдар.

Ш

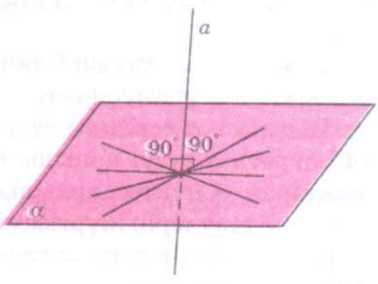
49. O нүктесінен α жазықтығына перпендикуляр және екі тең көлбеу жүргізілген. 1) Көлбеулердің проекциялары; 2) олардың перпендикулярмен жасайтын бұрыштары; 3) олардың өз проекцияларымен жасайтын бұрыштарының тең екенін дәлелдеңдер. Кері сөйлемдер құрып, оның дұрыстығын тексеріңдер.

50. Егер $\angle AOB = \angle AOC = 50^\circ$ болса, онда OB және OC түзулері перпендикуляр болуы мүмкін бе?

51. Жерге вертикаль етіп баған орнатылған. Жердегі қайсыбір нүктеден баған φ бұрышпен көрінеді. Жердегі тағы қандай нүктеден ол осындай бұрышпен көрінеді? Осындай нүктелер қандай фигураны құрайды?

§ 10. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі

40-суретте α жазықтығына перпендикуляр a түзуі бейнеленген.



40-сурет

Берілген түзудің берілген жазықтыққа перпендикуляр болатынын қалай тексеруге болады?

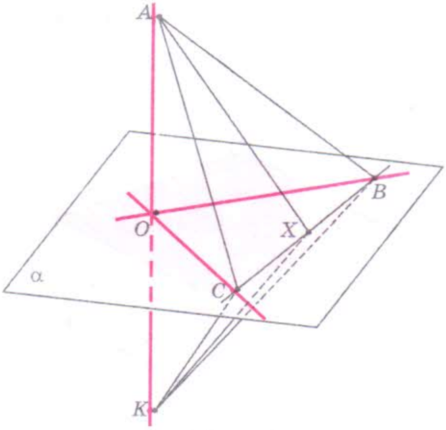
Бұл сұрақтың практикалық маңызы зор, мысалы, телеграф бағандарын, ғимарат колонналарын және т.б. орнатқанда оларды тік қою керек, яғни жер бетіне перпендикуляр орнату қажет.

Ол үшін анықтамада айтылғандай, түзудің жазықтықтағы әрбір түзуге перпендикулярлығын тексермей-ақ, түзу мен жазықтықтың қиылысуы арқылы өтетін жазықтықта жатқан қиылысқан екі түзуге перпендикулярлығын тексеру жеткілікті болады екен.

Басқаша айтсақ, түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығының мынадай белгісі орындалады.

10-теорема (түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі). ***Егер жазықтықты қиятын түзу осы жазықтықта жатқан өзара қиылысқан екі түзуге перпендикуляр болса, онда ол түзу жазықтыққа перпендикуляр болады.***

Дәлелдеу. Айталық, α жазықтығын O нүктесінде қиятын AO түзуі осы жазықтықтағы OB және OC түзулеріне перпендикуляр дейік (41-сурет). AO түзуінің α жазықтығында жатқан кез келген OX түзуіне перпендикуляр екенін дәлелдейік. Ол үшін α жазықтығында OB, OC және OX түзулерін B, C және X нүктелерінде қиып өтетін кез келген түзуді жүргіземіз. Ал OA түзуінің бойына O нүктесінің екі жағына өзара тең OA және OK кесінділерін өлшеп саламыз. A мен K нүктелерін B, C, X нүктелерімен қосып, үшбұрыштардың бірнеше жұбын аламыз. ABK және ACK үшбұрыштары теңбүйірлі, сондықтан да олардың BO және CO медианалары биіктік те болады. Сонымен, $AB=BK$ және $AC=CK$. ABC және BCK үшбұрыштары үш қабырғасы бойынша тең, сондықтан $\angle ABC = \angle KBC$. ABX және KBX үшбұрыштары да екі қабырғасы және олардың арасындағы бұрыштары бойынша тең.



41-сурет

Демек, $AX=KX$. AXK үшбұрышы теңбүйірлі болғандықтан, оның XO медианасы оған әрі биіктік болады, яғни $AO \perp XO$. Демек, анықтама бойынша AO түзуі α жазықтығына перпендикуляр. Теорема дәлелденді.

1 - м ы с а л . Түзудің берілген нүктесі арқылы оған перпендикуляр жазықтық жүргізу керек.

Ш е ш у і . a берілген түзу және A оның бойындағы нүкте болсын (42-сурет). a түзуі арқылы екі жазықтық жүргіземіз. Осы жазықтықтарда A нүктесі арқылы өтіп, a түзуіне перпендикуляр болатын b және c түзулерін жүргіземіз. Бұл екі түзу арқылы (3-салдар, §2-ты қарандар) өтетін α жазықтығы, a түзуіне перпендикуляр (10-теорема бойынша).

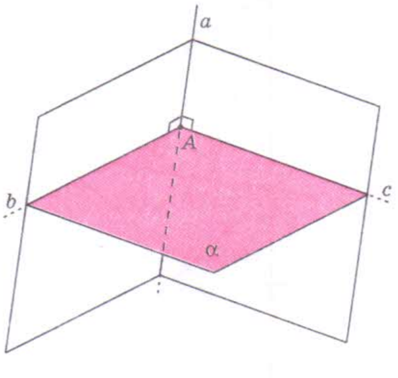
2 - м ы с а л . Тікбұрышты ABC үшбұрышының C төбесі арқылы үшбұрыш жазықтығына (α) перпендикуляр CK түзуі жүргізілген. Егер $\angle C=90^\circ$, $AC=6$см, $BC=8$ см, $CK=12$ см және CM медиана болса, онда KM арақашықтығын табыңдар (43-сурет).

Ш е ш у і . $CK \perp \alpha \Rightarrow CK \perp CM$, $AB=\sqrt{6^2+8^2}=10$. (Пифагор теоремасынан). $CM=5$ (тікбұрышты үшбұрыштың тік төбесінен гипотенузаға жүргізілген медиана гипотенузаның жартысына тең). $KM=\sqrt{5^2+12^2}=13$ см.

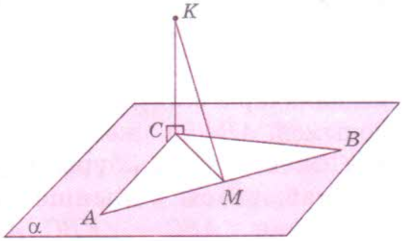
Жауабы: $KM=13$ см.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығын қалай тексереміз?
2. Түзуге перпендикуляр жазықтықты қалай саламыз?
3. a түзуі α жазықтығына перпендикуляр. α жазықтығында a түзуіне перпендикуляр болмайтын түзулер болуы мүмкін бе?
4. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі туралы теореманы дәлелдеңдер.



42-сурет



43-сурет

Есептер

О

52. α жазықтығында диагональдары O нүктесінде қиылысатын $ABCD$ квадраты берілген. O нүктесі арқылы α-ға перпендикуляр a түзуі жүргізілген. E — a түзуінде жататын нүкте. Квадрат диагоналінің ұзындығы 6 см, ал $OE=4$ см болса, онда E нүктесінен квадраттың төбелеріне дейінгі қашықтықты табыңдар.

53. $ABCD$ — α жазықтығында жатқан ромб. O — ромб диагональдарының қиылысу нүктесі. d түзуі α жазықтығына перпендикуляр және O нүктесі арқылы өтеді. E — d түзуінде жататын нүкте. $OE = 8$ см, $AB = 12$ см және ромб бұрыштарының бірі 60° болса, онда E нүктесінен ромб төбелеріне дейінгі қашықтықтарды есептеңдер.

54. OA, OB, OC сәулелері қос-қостан перпендикуляр. Егер 1) $OA = OB = OC = 5$ см; 2) $OA = OB = OC = a$; 3) $OA = OB = 3$ дм, $OC = 4$ дм болса, онда ABC үшбұрышының периметрін табыңдар.

55. M және N нүктелерінен α жазықтығына перпендикулярлар түсірілген. Перпендикулярлардың табандары сәйкесінше M_1 және N_1. Егер $MM_1=8$ см, $NN_1=20$ см, $MN=15$ см болса, онда M_1N_1 кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

56. Ұзындығы 12 см-ге тең BC кесіндісі AC кесіндісінің α жазықтығындағы ортогональ проекциясы болып табылады. D нүктесі AC кесіндісінде жатыр және $AD:DC=2:3$. Егер $AB = 9$ см болса, AD кесіндісінің және оның α жазықтығындағы проекциясының ұзындығын табыңдар.

Ш

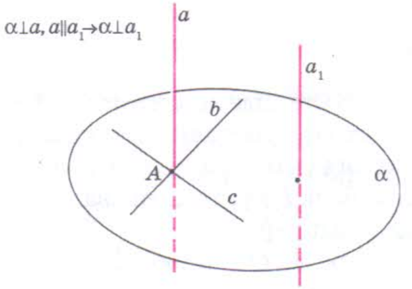
***57.** Егер $\angle AOB = \angle AOC = 40^\circ$ болса, онда OB мен OC түзулері перпендикуляр бола ма?

58. $ABCD$ квадратының A төбесінен квадрат жазықтығына перпендикуляр ұзындығы 3-ке тең AK кесіндісі жүргізілген. K нүктесінен BC және CD қабырғаларына перпендикулярлар жүргізілген. K нүктесінен BC қабырғасына түсірілген перпендикулярдың ұзындығы 6-ға тең. Осы перпендикулярлардың квадрат жазықтығымен жасайтын бұрыштарын табыңдар.

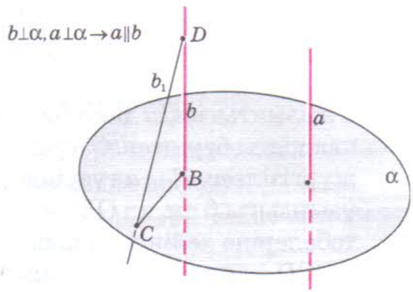
§ 11. Перпендикуляр түзу мен жазықтықтың қасиеттері

11-теорема. ***Егер жазықтық параллель екі түзудің біріне перпендикуляр болса, онда ол екінші түзуге де перпендикуляр болады.***

Д э л е л д е у. Айталық, $a \parallel a_1$ және $a \perp \alpha = A$, $a \cap \alpha = A$ дейік. $a_1 \perp \alpha$ екенін дәлелдейік (44-сурет). $a \perp \alpha$ болғандықтан, α жазық-



44-сурет



45-сурет

тығынан a түзуіне перпендикуляр және A нүктесінде қиылысатын b мен c түзулері табылады (анықтамадан). b мен c түзулері a-ға перпендикуляр болғандықтан, олар 9-теорема бойынша a түзуіне параллель болатын a_1 түзуіне де перпендикуляр. Сондықтан 10- теорема бойынша $a_1 \perp \alpha$. Теорема дәлелденді.

12-теорема (кері теорема). ***Бір жазықтыққа перпендикуляр болатын екі түзу өзара параллель болады*** **(45-сурет).**

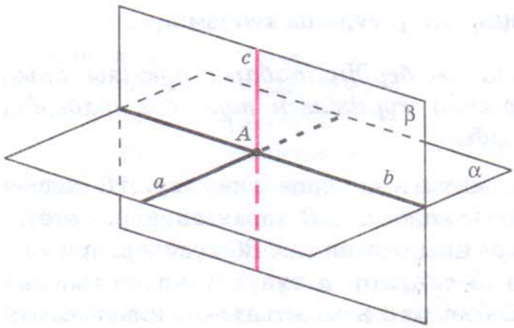
Мысал. Берілген α жазықтығының A нүктесі арқылы оған перпендикуляр түзу жүргізіңдер.

Шешуі. α жазықтығындағы A нүктесі арқылы a түзуін жүргіземіз. A нүктесінде a-ға перпендикуляр β жазықтығын жүргіземіз (46-сурет), $\beta \cap \alpha = b$. β жазықтығында A нүктесі арқылы b-ға перпендикуляр өтетін c түзуін саламыз. Сонда $c \perp b$ және $c \perp a$ болып шығады. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі (10-теорема) бойынша $c \perp \alpha$. c түзуі — іздеп отырған түзу.

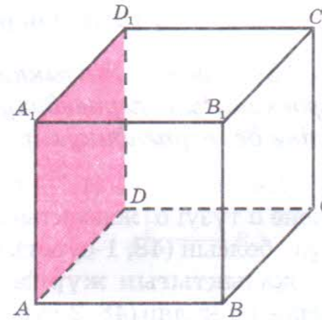
Кері жору арқылы оның жалғыз болатынын өздерің дәлелдеңдер.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Егер жазықтық параллель екі түзудің біріне перпендикуляр болса, онда ол екіншісіне де перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер (11-теорема).
2. Кері теореманы қайталап, есте сақтаңдар.
3. 47-суретте тікбұрышты параллелепипед бейнеленген. Суретті пайдаланып, мына сұрақтарға жауап беріңдер:
   1) $ABCD$ табаны қай қырларға перпендикуляр?
   2) ADD_1A_1 жағына перпендикуляр болатын қырлардың жұбын атаңдар.
4. Перпендикуляр түзу мен жазықтықтың қасиеттеріне қоршаған ортадан мысалдар келтіріңдер.



46-сурет



47-сурет

Есептер

О

59. *AB* кесіндісінің *A* ұшы α жазықтығында жатыр, ал *B* ұшы жазықтықтан 12 см қашықтықта орналасқан. *C* нүктесі — *AB* кесіндісінің ортасы, $AB = 15$ см. *AB* кесіндісінің α жазықтығындағы *AD* проекциясының ұзындығын және *C* нүктесінен жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңдар.

60. *CD* кесіндісінің ұштары жазықтықтан 4 см және 6 см қашықтықта орналасқан. *CD* кесіндісінің ортасы болып табылатын *E* нүктесінің жазықтықтан қандай қашықтықта орналасқанын анықтаңдар.

61. *ABC* теңбүйірлі үшбұрышында $AB=BC=5$ см, $AC=8$ см. *DB* — жазықтыққа перпендикуляр кесінді, $DB=3$ см. *AC* кесіндісінің ортасы *E* нүктесінен *DB* кесіндісінің ұштарына дейінгі қашықтықты табыңдар.

62. α жазықтығына перпендикуляр AA_1 және BB_1 түзулері жазықтықты A_1, B_1 нүктелерінде, ал *AB* түзуі *C* нүктесінде қиып өтеді. $AA_1=12$ см, $BB_1=4$ см, $B_1C=2$ см. A_1B_1 қашықтығын табыңдар.

63. *ABC* теңқабырғалы үшбұрышы берілген. *AO* кесіндісі оның жазықтығына түсірілген перпендикуляр. 1) $AB=6$ см, $AO=8$ см; 2) $AB=AO=a$ жағдайлары үшін *OBC* үшбұрышының периметрі мен ауданын табыңдар.

Ш

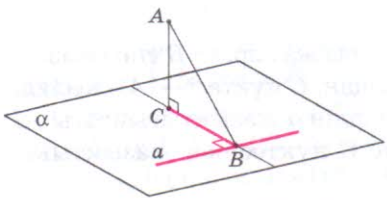
***64.** *AB* және *CD* түзулері бір жазықтыққа перпендикуляр және оны сәйкесінше *B* және *D* нүктелерінде қиып өтеді. Егер $AB = 9$, $CD=15$, $BD=8$ болса, *AC*-ның ұзындығын табыңдар (екі жағдайды қарастырыңдар).

65. Пирамиданың бүйір қырлары оның табан жазықтығымен өзара тең көлбеу бұрыштар жасайды. Пирамиданың төбесі қандай нүктеге проекцияланады?

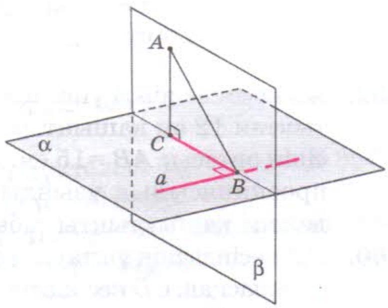
§ 12. Үш перпендикуляр туралы теорема

13-теорема. ***Жазықтықта көлбеудің табаны арқылы оның проекциясына перпендикуляр етіп жүргізілген түзу сол көлбеудің өзіне де перпендикуляр болады.***

Дәлелдеу. AC — α жазықтығына перпендикуляр, AB көлбеу және a түзуі α жазықтығындағы көлбеудің B табаны арқылы өтетін түзу болсын (48, 1-сурет). Өзара қиылысқан AC, BC түзулері арқылы β жазықтығын жүргіземіз (3-салдар). a түзуі β жазықтығына перпендикуляр (48, 2-сурет). Себебі, ол β жазықтығының қиылысатын AC және BC түзулеріне перпендикуляр (10-теорема). Олай болса, a түзуі β жазықтығындағы кез келген түзуге де перпендикуляр, яғни $a \perp AB$. Теорема дәлелденді.



1)

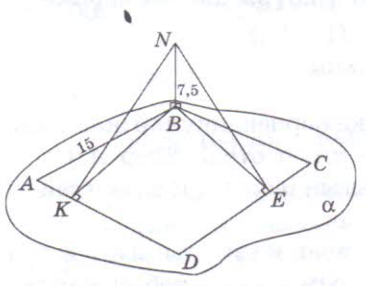


2)

48-сурет

14-теорема (кері теорема). ***Егер жазықтықтағы түзу көлбеуге перпендикуляр болса, онда сол түзу көлбеудің проекциясына да перпендикуляр болады.***

Мысал. $ABCD$ ромбының B төбесі арқылы α ромб жазықтығына перпендикуляр BN түзуі жүргізілген (49-сурет). Егер $AB = 15$ см, $\angle BAD = 60^\circ$, $BN = 7{,}5$ см болса, A нүктесінен ромбы қабырғаларын қамтитын түзулерге дейінгі қашықтықты табыңдар.



49-сурет

Шешуі. 1) $BK \perp AD$ жүргіземіз. BK кесіндісі NK көлбеуінің α жазықтығындағы проекциясы, $AD \perp BK$, сондықтан $AD \perp NK$ (үш перпендикуляр туралы теорема бойынша). NK — N нүктесінен AD түзуіне дейінгі қашықтық. NE-нің ұзындығы — N нүктесінен DC түзуіне дейінгі қашықтық.

2) ABK үшбұрышынан: $BK = AB \times \times \sin 60^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{2}$.

3) $\triangle NBK$— тікбұрышты үшбұрыш, себебі $NB \perp \alpha$, $\angle B = 90^\circ$.

4) $BK = BE$ (ромбының биіктігі); $\triangle NBK = \triangle NBE$ (екі катеті бойынша); $NE = NK = 15$ см.

5) N нүктесінен AB және BC түзулеріне дейінгі қашықтық NB перпендикулярының ұзындығына тең, яғни 7,5 см.

Жауабы: 15 см; 15 см; 7,5 см; 7,5 см.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Үш перпендикуляр туралы теореманы дәлелдеңдер.
2. Кері теореманы қайталап, есте сақтаңдар.

Есептер

О

66. A нүктесінен α жазықтығына AA_1 перпендикуляры мен AB көлбеуі жүргізілген. BA_1 — көлбеудің проекциясы. Егер
1) $AB = 5$ см, $AA_1 = 4$ см болса, онда BA_1-ді;
2) $AA_1 = 8$ дм, $BA_1 = 6$ дм болса, онда AB-ны;
3) $AB = 16$ см, $BA_1 = 4$ см болса, онда AA_1-ді табыңдар.

67. $ABCD$ квадрат жазықтығына BE перпендикуляр кесінді тұрғызылған. Егер $BC = 3$ см, $CE = 4$ см болса, онда E нүктесінен BC, CD, AC түзулеріне дейінгі қашықтықты табыңдар.

68. A төбесі арқылы $ABCD$ ромбының жазықтығына перпендикуляр AP түзуі жүргізілген. Егер $PA = AB = a$ және $\angle ABC = 120^\circ$ болса, онда P нүктесінен BC, CD және BD түзулеріне дейінгі қашықтықты табыңдар.

69. Берілген нүктеден жазықтыққа ұзындықтары 18 дм және 24 дм болатын екі көлбеу жүргізілген. Олардың проекцияларының айырымы 14 дм. Көлбеулердің проекцияларын табыңдар.

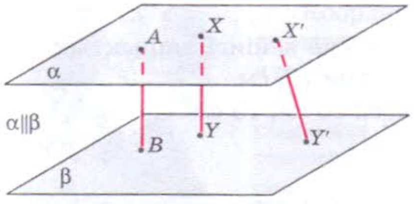
70. α жазықтығынан 0,8 м қашықтықта жатқан A нүктесінен ұзындығы 1 м болатын көлбеу жүргізілген. Көлбеу табандарының геометриялық орны қандай фигура болады?

71. Нүктеден жазықтыққа жүргізілген екі көлбеудің ұзындықтарының қосындысы 56 см, ал қатынасы 15:41. Егер олардың проекцияларының ұзындықтары 12 см және 40 см болса, онда көлбеулердің ұзындықтарын есептеңдер.

Ш

72. Тікбұрышты ABC үшбұрышының A төбесі арқылы α үшбұрыш жазықтығына AK перпендикуляры жүргізілген, $AE \perp BC$. Егер $AB = 17$ см, $AC = 15$ см, $BC = 8$ см, $AK = 20$ см болса, KE көлбеуінің ұзындығын табыңдар.

§ 13. Түзулер мен жазықтықтардың арақашықтығы



50-сурет

Кез келген екі геометриялық фигураның арақашықтығы деп олардың ең жақын нүктелерінің (ондай нүктелер бар болса) арақашықтығын түсінеміз.

1. Параллель жазықтықтардың арақашықтығы.

Анықтама. *Параллель екі жазықтықтың арақашықтығы олардың біреуінің кез келген нүктесінен екіншісіне түсірілген перпендикулярдың ұзындығына тең* (50-сурет).

Шындығында, бұл перпендикулярлар өзара тең. Себебі параллель екі жазықтықтың арасындағы параллель түзулердің кесінділері тең (7-теорема).

Параллель жазықтықтардың арақашықтығына призманың биіктігі, бөлмедегі төбенің биіктігі мысал бола алады.

2. Жазықтық пен оған параллель түзудің арақашықтығы.

Анықтама. *Жазықтық пен оған параллель түзудің* ***арақашықтығы*** *деп түзудің кез келген нүктесінен жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың ұзындығын айтады* (51-сурет).

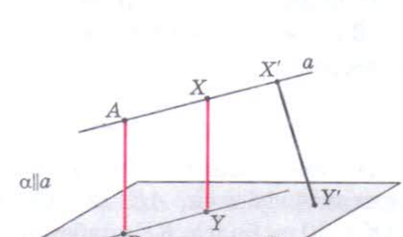
Түзу жазықтыққа параллель болса, түзудің барлық нүктелері жазықтықтан бірдей қашықтықта жататынын дәлелдеу параллель жазықтықтардың арақашықтығына келтіріледі (51-сурет).

3. Айқас түзулердің арақашықтығы.

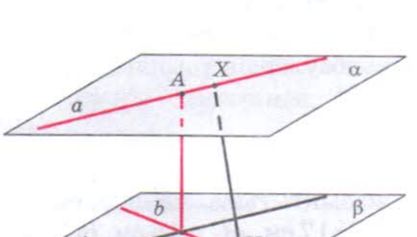
Алдымен айқас түзулердің ортақ перпендикуляры түсінігін береміз.

Анықтама. *Айқас түзулердің ортақ* ***перпендикуляры*** *деп осы түзулердің әрқайсысына перпендикуляр болатын, ұштары осы түзулерде жататын кесіндіні айтады.*

52-суреттегі AB кесіндісі a және b айқас түзулерінің ортақ перпендикуляры. Осыны түсіндірейік.



51-сурет



52-сурет

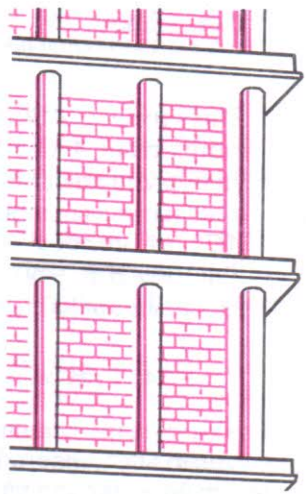
a және b айқас түзулері параллель жазықтықтарда жатады. Оларды сәйкесінше α, β деп белгілейік. a түзуінің β жазықтығындағы проекциясы a' түзуі b түзуін B нүктесінде қиып өтсін. B нүктесі β жазықтығына түсірілген қайсыбір $A \in \alpha$ нүктесінің проекциясы. AB кесіндісі α мен β жазықтықтарының ортақ перпендикуляры. Ендеше, ол a және b түзулеріне де ортақ перпендикуляр. Егер одан өзге XY ($X \in a$, $Y \in b$) кесіндісін алсақ, онда $AB < XY$ орындалады. Сондықтан айқас түзулердің арақашықтығы олардың ортақ перпендикулярына тәуелді.

Анықтама. *Айқас түзулердің* ***арақашықтығы*** *деп олардың ортақ перпендикулярының ұзындығын айтады.*

Параллель түзулер мен жазықтықтар (қанша созсақ та) қиылыспайтын түзулер мен жазықтықтар ретінде анықталады. Бірақ біз нақты өмірде түзулер мен жазықтықтардың шектелген бөліктеріне сай іс-әрекет жасаймыз. Ешбір ағаш шебері тақтай жиегін шексіз етіп созбайды, сол сияқты құрылысшылар, қабаттар арасындағы жаппаларды шексіз етіп ойша да созбайды.

Түзулер мен жазықтықтардың параллельдігін сипаттайтын осындай қасиеттердің ішіндегі маңыздысы — арақашықтықтың тұрақтылығы, яғни бір түзудің немесе бір жазықтықтың нүктелерінің екіншісінен бірдей қашықтықта орналасуы. Параллель екі жазықтықтың араларында қалатын ортақ перпендикулярлар өзара тең. Кері тұжырым да орындалады: берілген жазықтықтың бір жағына тұрғызылған тең перпендикулярлардың екінші ұштары берілген жазықтыққа параллель жазықтықта жатады.

Сөз болып отырған кесінділердің нақты мысалдары ретінде ғимараттардың астыңғы қабатында орналасқан бағандар мен колонналарды және оларға тірелетін жаппаларды келтіруге болады. Биіктігі бірдей колонналарға ғимараттың жоғарғы жазықтығы тіреледі. Қазіргі заман құрылысында да қабатаралық жаппаларды биіктіктігі бірдей вертикаль бағандарға тіреп орнатады. Бағандардың жоғарғы бастары табандары жатқан жазықтыққа параллель жазықтықта жатады (53-сурет).



53-сурет

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Параллель жазықтықтардың арақашықтығын қалай табамыз?
2. Жазықтық пен оған параллель түзудің арақашықтығын қалай анықтайды?
3. Айқас түзулердің ортақ перпендикуляры дегеніміз не?
4. Айқас түзулердің арақашықтығын қалай табамыз?

Есептер

О

73. Параллель жазықтықтардың арақашықтығы h. Ұзындығы a болатын кесіндінің ұштары осы жазықтықтарда жатыр. Кесіндінің әр жазықтықтағы проекциясын табыңдар.

74. Жазықтықтың бір жағында жататын AB кесіндісінің ұштарынан жазықтыққа перпендикулярлар түсірілген. Олардың ұзындықтары 7 см және 10 см, ал табандарының арақашықтығы 4 см. AB-ның ұзындығын табыңдар.

75. Жазықтықтың бір жағында жатқан кесіндінің ұштары одан 3 см және 5 см қашықтықта орналасқан. Берілген кесіндіні 1) тең екіге бөлетін; 2) $\frac{3}{7}$ қатынасында бөлетін нүкте жазықтықтан қандай қашықтықта орналасқан?

76. Кубтың қыры a-ға тең. Оның қарама-карсы жақтарындағы айқас диагональдарының арақашықтығын табыңдар.

77. Ұзындықтары 13 дм және 37 дм екі кесіндінің ұштары параллель жазықтықтарға тіреледі. Қысқа кесіндінің жазықтықтағы проекциясының ұзындығы 5 дм. Үлкен кесіндінің проекциясын табыңдар.

78. Ұштары жазықтықтан 5 дм және 3 дм аралықта жататын ұзындығы 10 дм болатын кесінді жазықтықты қиып өтеді. Кесіндінің жазықтықтағы проекциясын табыңдар.

79. Нүктеден жазықтыққа ұзындықтары 17 м және 10 м болатын екі көлбеу жүргізілген. Олардың проекцияларының айырымы 9 м. Берілген нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңдар.

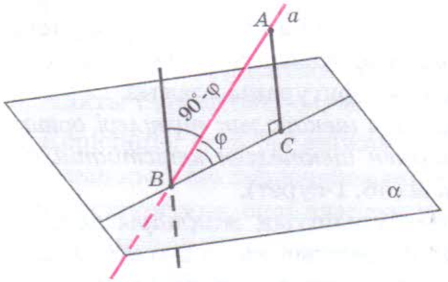
Ш

80. E нүктесінен ABC дұрыс үшбұрышының әрбір төбесіне дейінгі қашықтық 4 см. Егер $AB = 6$ см болса, E нүктесінен ABC үшбұрышының жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

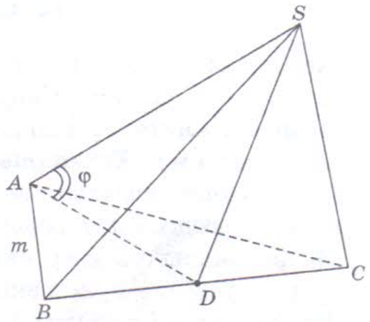
81. α жазықтығында жатпайтын A нүктесінен жазықтыққа AB мен AC екі көлбеу және AO перпендикуляры жүргізілген. $\angle AOB = \angle BAC = 60^\circ$, $AO = 1{,}5$ см екені белгілі. Көлбеулердің табандарының арақашықтығын табыңдар.

§ 14. Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш

Өткен тақырыптарда біз түзу мен жазықтықтың орналасуының үш жағдайын қарастырдық: 1) түзу жазықтықта жатады; 2) түзу жазықтыққа параллель; 3) түзу жазықтыққа перпендикуляр. Енді түзу жазықтықпен қиылысқан, бірақ түзу жазықтыққа перпенди-



54-сурет



55-сурет

куляр болмайтын жағдайды қарастыру қалады. Мұндай түзулер жазықтықпен әр түрлі бұрыш жасап қиылысуы мүмкін. Енді түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш түсінігін анықтауға кірісеміз.

Анықтама. ***Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш*** *деп көлбеу мен оның жазықтықтағы проекциясы арасындағы бұрыш аталады* (54-сурет).

Жазықтық пен жазықтықта жатқан түзу немесе жазықтыққа параллель түзу арасындағы бұрыш 0°-қа тең деп есептеледі.

Жазықтық пен оған перпендикуляр түзу арасындағы бұрыш 90°-қа тең деп алынады. Сондықтан $0^\circ \leqslant \varphi \leqslant 90^\circ$ (54-сурет).

Кесінді мен жазықтықтың арасындағы бұрыш деп осы кесіндіні қамтитын түзу мен жазықтық арасындағы бұрышты айтамыз.

Параллель түзулердің берілген жазықтықпен жасайтын бұрыштары тең болады.

Мысал. Дұрыс тетраэдрдің AS қыры мен ол жатпайтын ABC жағы арасындағы φ бұрышын есептеңдер (55-сурет).

Шешуі. Тетраэдрдің қыры m-ге тең деп алайық, ал D нүктесі BC қырының ортасы болсын. Сонда AD түзуі AS түзуінің ABC жазықтығындағы ортогональ проекциясы болады. Демек, іздеп отырған φ бұрышы SAD бұрышына тең. Теңқабырғалы ABC үшбұрышынан $AD=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot m$. Теңбүйірлі ASD ($AD=DS$) үшбұрышынан $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Жауабы: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш қалай анықталады?
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының берілген түзулері арасындағы бұрышты табыңдар:
   1) AB және BB_1;
   2) BD және BB_1.

§ 15. Екіжақты бұрыш

Кеңістіктегі жартыжазықтықты жазықтықтағы сәулеге ұқсатуымызға болады. Сонда кеңістікте жазықтықтағы бұрышқа ұқсатып екі жақты бұрыш деп аталатын фигураны аламыз.

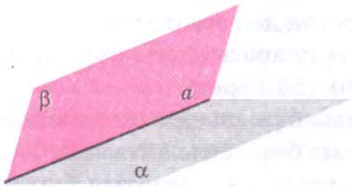
Анықтама. ***Екіжақты бұрыш*** *деп шекаралық түзулері ортақ екі жартыжазықтықтан және олармен шектелген кеңістіктің бір бөлігінен тұратын фигураны айтады* (56, 1-сурет).

Жартыжазықтықтар екіжақты бұрыштың *жақтары* деп, ал олардың ортақ шекарасы екіжақты бұрыштың *қыры* деп аталады.

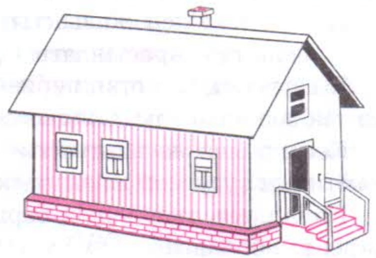
56, 1-суретте екіжақты бұрыш кескінделген. α және β жартыжазықтықтарының әрқайсысы екіжақты бұрыштың жақтары, ал олардың ортақ түзуі a — екіжақты бұрыштың қыры.

Екіжақты бұрыш үй шатырлары, жартылай ашық тұрған есік тәрізді болып келеді (56, 2-сурет). Анықтама да соған сәйкес беріледі.

Екіжақты бұрышты сызықтық бұрыштың көмегімен өлшеуге болады.



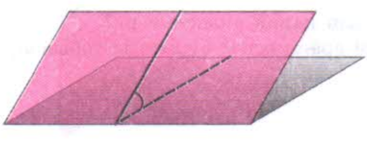
1)


2)

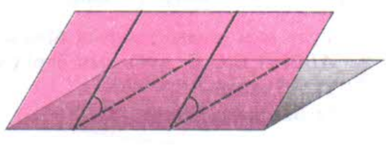
56-сурет

Екіжақты бұрыштың қырынан нүкте аламыз да, әрбір жағына осы нүктеден қырына перпендикулярлар түсіреміз. Бұл перпендикулярлар құрайтын бұрыш екіжақты бұрыштың *сызықтық бұрышы* деп аталады (57-сурет).

Сызықтық бұрыштың төбесі ретінде екіжақты бұрыштың қырындағы кез келген нүктені алуға болады. Сәйкес қабырғалары параллель болғандықтан, бұл бұрыштар өзара тең (58-сурет).



57-сурет

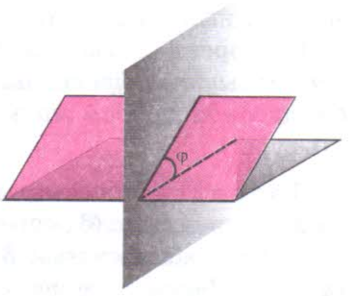


58-сурет

Өзара тең екіжақты бұрыштардың сызықтық бұрыштары да тең және керісінше, сызықтық бұрыштары тең екіжақты бұрыштар өзара тең болады.

Сызықтық бұрыштың қабырғалары арқылы өтетін жазықтық екіжақты бұрыштың қырына перпендикуляр.

Керісінше, егер біз екіжақты бұрыштың қырына перпендикуляр жазықтық жүргізсек, онда олардың қиылысуынан сызықтық бұрыш аламыз (59-сурет). Шындығында, екіжақты бұрыштың қыры қиюшы жазықтыққа перпендикуляр, сондықтан ол осы түзулерге де перпендикуляр болады. Бұл түзулер анықтама бойынша сызықтық бұрышты құрайды.



59-сурет

Екіжақты бұрыштың шамасы деп оның сызықтық бұрышының шамасы аталады. Сызықтық бұрышы тік болып келген екіжақты бұрыш *тік екіжақты бұрыш* деп аталады.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Екіжақты бұрыш деп қандай фигураны айтады?
2. Екіжақты бұрыштың жақтары деген не?
3. Екіжақты бұрыштың қыры деп нені айтады?
4. Екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы деп қандай бұрышты айтамыз?
5. Екіжақты бұрыштың шамасын қалай есептейміз?

§ 16. Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш. Перпендикуляр жазықтықтар

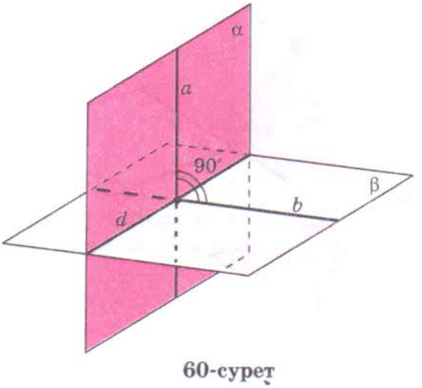
Жазықтықтардың арасындағы бұрыш былай анықталады.

Анықтама. *Қиылысқан екі жазықтықтың арасындағы бұрыш деп сәйкес жартыжазықтықтардан құралған екіжақты бұрыштардың ең кішісін айтады.*

Параллель жазықтықтардың арасындағы бұрыш 0°-қа тең.

α және β жазықтықтарының арасындағы бұрыш та, жақтары α мен β болатын екіжақты бұрыш та $\angle(\alpha\,\beta)$ деп белгіленеді.

Анықтама. *Тік екіжақты бұрыш жасап қиылысатын екі жазықтықты* ***перпендикуляр жазықтықтар*** *деп атайды* (60-сурет).



60-сурет

α мен β жазықтықтарының перпендикулярлығы $\alpha \perp \beta$ деп белгіленеді. Бұл жағдайда α жазықтығы β жазықтығына перпендикуляр немесе β жазықтығы α жазықтығына перпендикуляр деп айтылады.

Перпендикуляр жазықтықтарға мысал ретінде бөлменің едені мен қабырғасын, кубтың немесе тікбұрышты параллелепипедтің іргелес екі жағының жазықтықтарын келтіруге болады.

14-теорема (жазықтықтардың перпендикулярлық белгісі). ***Егер екі жазықтықтың бірі екіншісіне перпендикуляр түзу арқылы өтетін болса, онда мұндай жазықтықтар өзара перпендикуляр болады*** (61-сурет).

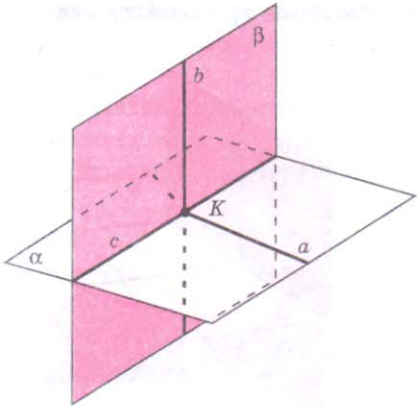
Дәлелдеу. β жазықтығы α жазықтығына перпендикуляр b түзуі арқылы өтеді дейік (61-сурет). $\beta \perp \alpha$ екенін дәлелдейік.

b түзуі α жазықтығын K нүктесінде қиып өтеді. Бұл нүкте α мен β-ға ортақ. Демек, α және β жазықтықтары K нүктесі арқылы өтетін қандай да бір c түзуі бойымен қиылысады (A_3-аксиома, §1-ты қарандар). α жазықтығында K нүктесі арқылы c-ға перпендикуляр a түзуін жүргіземіз. Сонда a мен c түзулері бір α жазықтықта жататын және $b \perp a$ орындалатын болғандықтан, $b \perp c$. Салуымыз бойынша $a \perp c$. Олай болса, $\angle(\alpha\beta) = \angle(ab) = 90^\circ$, яғни $\beta \perp \alpha$. Теорема дәлелденді.

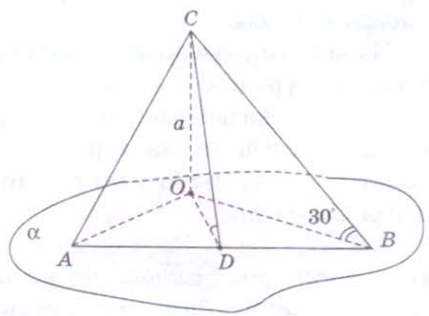
Мысал. Тікбұрышты теңбүйірлі ABC үшбұрышының AB гипотенузасы α жазықтығында жатыр, ал катеті α жазықтығы мен 30°-қа тең көлбеулік бұрыш жасайды. α жазықтығы мен ABC үшбұрышы жазықтығының арасындағы бұрыштың шамасын табу керек (62-сурет).

Шешуі. 1) $CO \perp \alpha$ жүргіземіз. Сонда $\angle CBO = 30^\circ$. $CO = a$ десек, $CB = 2a$.

2) $CD \perp AB$ жүргіземіз, сонда үш перпендикуляр туралы теоремаға кері теорема бойынша $AB \perp DO$.



61-сурет



62-сурет

$\angle CDO$— ізделінді бұрыш.

3) CDB үшбұрышынан: $\angle CBD=45^\circ$, $CD=CB\cdot\sin45^\circ$, $CD=a\sqrt{2}$.

4) CDO үшбұрышынан: $\sin\widehat{SDO} = \frac{CO}{CD}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\angle CDO=45^\circ$.

Жауабы: 45°.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Екі жазықтықтың арасындағы бұрышты қалай есептейміз?
2. Перпендикуляр жазықтықтар деп қандай жазықтықтар аталады?

Есептер

О

82. d түзуі α жазықтығын 45° бұрышпен O нүктесінде қиып өтеді. O нүктесі арқылы өтетін, α жазықтығымен 45° жасайтын тағы да түзу жүргізуге бола ма? Болса, қанша?

83. AB түзуі α жазықтығын 30° бұрышпен қиып өтеді. AA_1 — перпендикуляр, BA_1 — AB-ның α жазықтығындағы проекциясы. Егер 1) $AB = 24$ см болса, онда BA_1 проекциясын және AA_1 перпендикулярын; 2) $AA_1 = 8$ см болса, онда AB көлбеуінің BA_1 проекциясын; 3) $BA_1 = 15$ см болса, онда AB көлбеуінің және AA_1 перпендикулярының ұзындығын табыңдар.

84. Өзара 40° бұрышпен қиылысатын екі түзудің біреуі қайсыбір жазықтыққа перпендикуляр. Екінші түзудің де осы жазықтықты қиып өтетінін дәлелдеңдер. Екінші түзу мен жазықтық арасындағы бұрышты есептеңдер.

85. Бір нүктеден жазықтыққа өзара тең екі көлбеу жүргізілген. Олардың арасындағы бұрыш 60°-қа, ал проекцияларының арасындағы бұрыш 90°-қа тең. Көлбеу мен жазықтық арасындағы бұрышты табыңдар.

86. Теңбүйірлі тікбұрышты екі үшбұрыштың ортақ гипотенузасының ұзындығы 6 дм-ге тең. Үшбұрыштың жазықтықтары перпендикуляр болса, олардың тікбұрышты төбелерінің арақашықтығын табыңдар.

87. Градустық шамасы 60°-қа тең екіжақты бұрыш берілген. M нүктесі оның бір жағында жатыр және одан екінші жағына дейінгі қашықтық 18 см. M нүктесінен екіжақты бұрыштың қырына дейінгі қашықтықты есептеңдер.

88. Екіжақты бұрыш 45°-қа тең. Оның бір жағында жататын D нүктесі қырынан 12 см қашықтықта орналасқан. D нүктесінен екінші жағына дейінгі қашықтықты есептеңдер.

89. Екіжақты бұрыш 60°-қа тең. Қырындағы M нүктесінен оның жақтарына перпендикуляр $MK = 3{,}5$ м және $MN = 1{,}2$ м екі кесінді жүргізілген. K мен N нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.

90. Егер ұзындығы 65 м эскалатор көкжиек жазықтығымен 42° бұрыш жасайтын болса, метро бекеті қандай терендікте орналасқан?

III

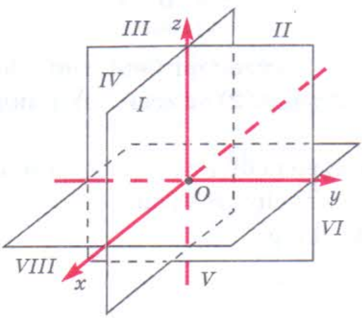
***91.** ABC үшбұрышының қабырғалары сәйкесінше $BC=15$ см, $AB = 13$ см, $AC = 14$ см. AC қабырғасы арқылы үшбұрыш жазықтығымен 30° бұрыш жасайтын α жазықтығы жүргізілген. B төбесінен α жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

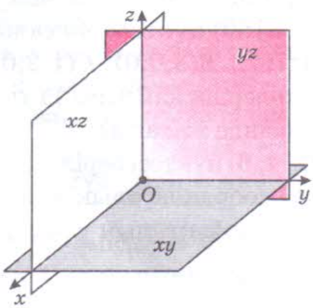
III тарау. КЕҢІСТІКТЕГІ КООРДИНАТАЛАР МЕН ВЕКТОРЛАР

§ 17. Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі

Жалпы, **координаталар** деп нүктенің орнын анықтайтын сандарды айтады. Сендер жазықтықтағы координаталар жүйесімен таныссыңдар. Осыған ұқсас координаталар жүйесін кеңістікте де қарастыруға болады. x, y, z координаталық түзулерін *координаталық осьтер* (x осі, y осі, z осі), ал O нүктесін *координаталардың бас нүктесі* дейміз (63, 1-сурет)

O нүктесінде қиылысатын өзара перпендикуляр x, y, z координаталық түзулері *координаталық осьтер*, ал O нүктесін *координаталардың бас нүктесі* дейміз (63, 1-сурет). Әрбір координаталық осьті O нүктесі оң және теріс жарты оське бөледі. Координаталық осьтердің әрбір жұбы — x пен y, x пен z, y пен z — *координаталық жазықтықтарды* анықтайды (63, 2-сурет). Координаталық жазықтықтар кеңістікті сегіз бөлікке (*октанталарға*) бөледі (63, 1-сурет).





63-сурет

Осындай координаталық жүйенің көмегімен кеңістіктің әрбір нүктесіне нақты сандардың реттелген үштігін немесе керісінше әрбір үш санға жалғыз нүктені сәйкес қоюға болады. Кеңістікте M нүктесі берілсін. Нүктеден yz, zx, xy жазықтықтарына MM_x, MM_y, MM_z перпендикулярын түсіреміз (64-сурет). Осы перпендикулярлардың ұзындықтарын сәйкес таңбаларымен алып, *M нүктесінің координаталары* деп атаймыз да, M (a, b, c) деп белгілейміз. Егер нүкте координаталық жазықтықтың бірінде жатса, онда оның сәйкес координатасы, ал нүкте координаталық осьте жатса, онда оның екі координатасы нөлге тең болады. Мысалы, N

64-сурет

Рене Декарт
(1596—1650)

(–2; 0; 5) нүктесі xz жазықтығында, ал $K(7;\ 0;\ 0)$ нүктесі Ox осінде жатады.

Координаталар әдісін алгебрамен қосып қолдану геометрияның *аналитикалық геометрия* деп аталатын бөлігін құрайды. Бұл әдісті алғаш қолданғандардың бірі — француздың атақты философы әрі математигі Рене Декарт. Сондықтан тікбұрышты координаталар жүйесін көбінесе *декарттық жүйе* деп атайды.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесінің жазықтықтағы тікбұрышты координаталар жүйесінен айырмашылығы неде?

Есептер

О

92. Координаталар бойынша $A(3;\ 1;\ 2)$, $B(-1;\ 4;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 53)$, $D(2;\ 51;\ 0)$ нүктелерін салыңдар.

93. $A(1;7;4)$, $B(3;0;0)$, $C(1;2;0)$, $D(0;5;1)$ нүктелері берілген. Осы нүктелердің қайсысы 1) xy жазықтығында; 2) yz жазықтығында; 3) x осінде жатады?

94. $M(2;\ 4;\ 6)$ нүктесі берілген. Осы нүктеден координаталық осьтерге және координаталық жазықтықтарға түсірілген перпендикулярдың табандарының ұзындығын табыңдар.

Ш

95. Берілген $A(-4;\ 0;\ 0)$, $B(5;\ -3;\ 0)$, $C(0;\ 2;\ 0)$, $D(3;\ -6;\ 0)$, $E(0;\ 0;\ -10)$, $F(0;\ 9;\ -7)$ нүктелерінің ішінен 1) Ox осінде; 2) Oy осінде; 3) xOy жазықтығында; 4) yOz жазықтығында жататын нүктелерді анықтаңдар.

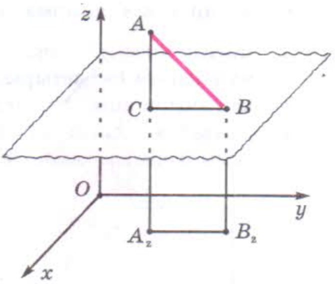
96. Берілген $M(0;\ 0;\ 5)$, $K(0;\ -1;\ -2)$ нүктелеріне 1) xOy жазықтығына қарағанда; 2) Oy осіне қарағанда симметриялы нүктелердің координаталарын табыңдар.

97. Тікбұрышты координаталар жүйесіне қарағанда, $M(a;\ 3;\ 5)$ нүктесі қандай түзудің бойында жатады?

§ 18. Нүктелердің арақашықтығы

1. Екі нүктенің арақашықтығы. $A\ (x_1, y_1, z_1)$ және $B\ (x_2, y_2, z_2)$ екі нүктенің арақашықтығын осы нүктелердің координаталары арқылы өрнектейтін формуланы табайық.

65-суретте көрсетілгендей, AB түзуі Oz осіне параллель болмайтын жағдайды қарастырайық. A және B нүктелері арқылы Oz осіне параллель түзулер жүргіземіз. Олар xy жазықтығын A_z және B_z нүктелерінде қиып өтеді. Бұл нүктелердің бірінші, екінші координаталары да A, B нүктелерінің координаталарындай, ал олардың үшінші координаталары нөлге тең. B нүктесі арқылы xy жазықтығы параллель жүргізілген жазықтық AA_z түзуін C нүктесінде қиып өтеді. Пифагор теоремасы бойынша $AB^2 = AC^2 + CB^2$. CB және A_zB_z кесінділері өзара тең. Бізге планиметриядан $A_zB_z{}^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ екені белгілі. Ал $AC = z_2-z_1$, сондықтан



65-сурет

$$AB^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2.$$

Егер AB кесіндісі Oz осіне параллель болса, онда $AB = z_2-z_1$, мұндағы $x_2=x_1$, $y_2=y_1$.

Сонымен, A және B нүктелерінің арақашықтығы мына формуламен есептеледі:

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ . \tag{1}$$

Бұл формула математика мен физиканың көптеген бөлімдерінде қолданылады.

1-мысал. Үшбұрыштың төбелері берілген: $A(4;4;-1)$, $B(7;8;-1)$, $C(-4;4;-1)$. Үшбұрыштың периметрін есептеңдер.

Шешуі. (1) формуладан

$$AB^2 = (7-4)^2 + (8-4)^2 + (-1+1)^2 = 25,$$
$$AC^2 = (-4-4)^2 + (4-4)^2 + (-1+1)^2 = 64,$$
$$BC^2 = (-4-7)^2 + (4-8)^2 + (-1+1)^2 = 137.$$

Бұдан $P = 5+8+\sqrt{137} = 13+\sqrt{137}$.

2. Кесінді ортасының координаталары. (1) формулаға сүйеніп ұштары $A(x_1, y_1, z_1)$ және $B(x_2, y_2, z_2)$ болатын AB кесіндісінің ортасы $C\ (x, y, z)$ нүктесінің координаталарын тауып аламыз:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2},\ y = \frac{y_1+y_2}{2},\ z = \frac{z_1+z_2}{2}. \tag{2}$$

2-мысал. 1-мысалдағы үшбұрыштың BB_1 медианасының ұзындығын табыңдар.

Шешуі. $B_1(x, y, z)$ нүктесі AC кесіндісінің ортасы. (2) формуладан

$$x = \frac{4-4}{2} = 0,\ y = \frac{4+4}{2} = 4,\ z = \frac{-1-1}{2} = -1,$$

яғни $B_1(0,4,-1)$. Бұдан $B_1B = \sqrt{65}$.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Жазықтықтағы және кеңістіктегі екі нүктенің арақашықтығын табу формулаларын салыстырыңдар. Олардың ұқсастығы неде? Олардың бір-бірінен айырмашылығы неде?
2. Қандай жағдайда (1) формула жазықтықтағы екі нүктенің арақашықтығы формуласымен беттеседі?

Есептер

О

98. $ABCD$ параллелограмының төбелері белгілі: $A(1;-3;0)$, $B(-2;-4;1)$, $C(-3;1;1)$, $D(0;2;0)$. Оның диагональдарының ұзындықтарын есептеңдер.

99. $(2;\ -2;\ 3)$ нүктесінен 1) координаталық жазықтықтарға; 2) координаталар осьтеріне; 3) координаталар басына дейінгі қашықтықты табыңдар.

100. $A(2;\ 1;\ 5)$ және $B(-2;\ 1;\ 6)$ нүктелерінің қайсысы координаталар басына жақын жатыр?

101. $M(0;\ 1;\ 1)$, $N(2;\ -1;\ 3)$, $K(-1;\ y;\ 0)$ нүктелері берілген. $MK = NK$ теңдігі орындалатындай y-тің мәнін табыңдар.

102. y осінің бойынан берілген $P(4;\ -1;\ 3)$ және $Q\ (1;\ 3;\ 0)$ нүктелерінен бірдей қашықтықта жатқан нүктені табыңдар.

Ш

103. xy жазықтығында жататын және $A(0;1;0)$, $B(-1;0;1)$, $C(0;\ -1;\ 0)$ нүктелерінен бірдей қашықтықта орналасқан нүктенің координаталарын табыңдар.

104. Төбелері $A(1;\ 3;\ 2)$, $B(0;\ 2;\ 4)$, $C(1;\ 1;\ 4)$, $D(2;\ 2;\ 2)$ нүктелері болатын $ABCD$ төртбұрышының параллелограмм болатынын дәлелдеңдер. $\cos A$-ны есептеңдер.

105. Егер $A\ (0;\ 2;\ 0)$, $B\ (1;\ 0;\ 0)$, $C\ (2;\ 0;\ 2)$, $D\ (1;\ 2;\ 2)$ болса, онда $ABCD$ төртбұрышы ромб болатынын дәлелдеңдер.

106. $ABCD$ параллелограмының үш төбесінің координаталары белгілі: $A(4;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ -3;\ 2)$, $C(-4;\ 2,\ 1)$. Параллелограмның D төбесінің координаталарын табыңдар.

§ 19. Вектор. Кеңістіктегі вектордың координаталары

Кеңістікте де жазықтықтағы сияқты *вектор* деп бағыты мен ұзындығы берілген шаманы атайды. Вектор ұзындығы вектордың ұзындығына тең бағытталған кесінді түрінде бейнеленеді. Планиметриядағы секілді кеңістіктегі векторлар үшін де негізгі ұғымдар анықталады: вектордың абсолют шамасы, вектордың бағыты, векторлардың теңдігі.

Айырмашылығы — тек екі өлшемді геометрияның қасиеттері үш өлшемді геометрия үшін кеңейтіліп беріледі. Егер планиметрияда векторды беру үшін оның екі ғана координатасын көрсету жеткілікті болса, стереометрияда үш координатасын беру керек.

Анықтама. *Басы $A(x_1;y_1;z_1)$ нүктесінде, ал ұшы $B(x_2;y_2;z_2)$ нүктесінде болатын $\overrightarrow{AB}$ векторының* ***координаталары*** *деп $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$ сандарын айтамыз.*

Координаталары белгілі болғанда, вектордың координаталарын көрсетіп, $\overrightarrow{AB}\,(a_1, a_2, a_3)$ немесе $\vec{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ деп жазамыз.

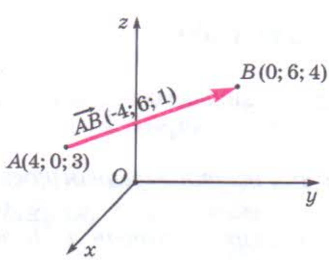
Мысалы, $\overrightarrow{AB}$ бағытталған кесіндісі үшін $A(4;0;3)$ бастапқы нүкте, ал $B(0;6;4)$ ұшы болса, онда $a_1 = 0 - 4 = -4$, $a_2 = 6 - 0 = 6$, $a_3 = 4 - 3 = 1$. Демек, $\overrightarrow{AB}$ бағытталған кесіндіге $\vec{a}\,(-4;\ 6;\ 1)$ векторы сәйкес келеді (66-сурет).

Жазықтықтағы секілді өзара тең векторлардың сәйкес координаталарының тең болатыны және керісінше, сәйкес координаталары тең векторлардың өзара тең болатыны дәлелденеді. Егер векторлар тең болса, онда олар бірдей бағытталған және абсолют шамасы жағынан да тең. Сондықтан бірінші вектордың бас нүктесі мен ұшын екінші вектордың сәйкес бас нүктесі мен ұшына көшіретін параллель көшіру бар болатыны дәлелденеді. Бұдан кез келген векторды кеңістіктің кез келген нүктесінен бастап салуға болатыны шығады.

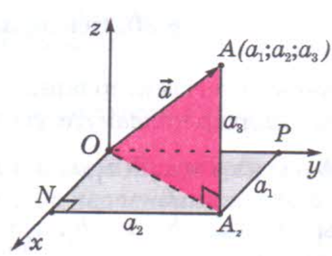
$\vec{a}\,(a_1,a_2,a_3)$ векторының ұзындығын оның координаталары арқылы өрнектейік. $\vec{a}$ векторын координаталар басынан бастап салайық (67-сурет). Сонда OPA_zN төртбұрышы — тіктөртбұрыш. Оның қабырғалары a_1 мен a_2-ге тең, сондықтан $OA_z^2 = a_1^2 + a_2^2$. OA_zA тікбұрышты үшбұрышының екінші катеті $A_zA = a_3$ және $OA^2 = OA_z^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

Бұдан $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Әрбір нөлден өзге вектордың ұзындығы оң сан, ал нөлдік вектордың ұзындығы нөлге тең.



66-сурет



67-сурет

Бір түзу бойында немесе параллель түзулер бойында жатқан (нөлден өзге) екі векторды *коллинеар* векторлар деп атағанбыз. Коллинеар векторлар *бағыттас* ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$) немесе *қарама-қарсы бағытталған* ($\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{n}$) болып бөлінеді. $\overrightarrow{ON}$ және $\overrightarrow{OM}$ векторлары коллинеар болса, O, N, M нүктелері бір түзудің бойында жатады.

Нөлдік векторлардың бағыты анықталмаған және кез келген векторға коллинеар деп саналады.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Фигураны параллель көшіруді вектор көмегімен қалай орындауға болады?

Есептер

О

107. AC кесіндісінің ортасы — B нүктесі, ал BD кесіндісінің ортасы — C нүктесі. $\overrightarrow{CA}$ және $\overrightarrow{DB}$ векторлары тең бе? $\overrightarrow{AB}$ мен $\overrightarrow{DC}$ ше?

108. Егер $A(2;4;3)$, $B(3;7;6)$ болса, $\overrightarrow{AB}$ векторының координаталарын табыңдар.

109. $\overrightarrow{CD}$ бағытталған кесіндінің ұшы $D(3;-2;1)$, ал оған сәйкес вектор $\vec{c}(-3;\ 2;\ 4)$ болса, бағытталған кесіндінің бастапқы нүктесін табыңдар.

110. $\vec{m}(3;2;1)$ және $\vec{n}(-2;-1;6)$ векторларының ұзындықтарын есептеңдер.

Ш

111. $\vec{a}(2;1;3)$ және $\vec{b}(-1;x;2)$ векторларының ұзындықтары тең. x-ті табыңдар.

112. Ұзындығы $\sqrt{54}$-ке тең $\vec{a}(2t;-t;t)$ векторының координаталарын табыңдар.

§ 20. Векторларға амалдар қолдану

Кеңістіктегі векторларға амалдар қолдану жазықтықтағы векторларға амалдар қолдануға ұқсас.

Анықтама. *$\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ және $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ векторларының* ***қосындысы*** *деп $(a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3)$ координаталары болатын $\vec{a}+\vec{b}$ векторын атайды.*

Әрбір $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары үшін мына теңдіктер орындалады:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ — қосудың ауыстырымдылық заңы;

2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ — қосудың терімділік заңы.

Дәлелдеу үшін теңдіктердің оң жақ және сол жақ бөліктерінде тұрған векторлардың сәйкес координаталарын салыстыру жеткілікті.

Кез келген A, B, C нүктелері үшін кеңістікте де $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ теңдігі орындалады.

Шынында, кез келген $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ үш нүкте үшін $\overrightarrow{AB}(b_1-a_1;\ b_2-a_2;\ b_3-a_3)$, $\overrightarrow{BC}(c_1-b_1;\ c_2-b_2;\ c_3-b_3)$.

Осыдан $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}(c_1-a_1; c_2-a_2; c_3-a_3)$.

Екі вектордың қосындысын кеңістікте геометриялық жолмен де, яғни үшбұрыш ережесімен де таба аламыз: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (68-сурет).

Параллелограмм ережесін қолдануға да болады. Ол әсіресе физикада жиі қолданылады.

Егер $ABCD$ параллелограмм болса (69-сурет), онда $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Бірнеше вектордың қосындысын табуда көпбұрыш ережесін қолданамыз. Мысалы, кеңістікте A, B, C, D, E, F нүктелері берілсе, онда

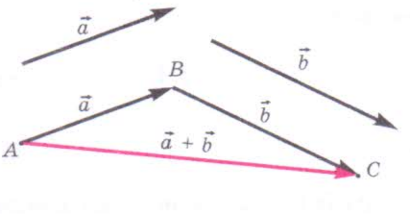
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}.$$

Анықтама. *Қосындылары нөл векторды беретін екі векторды* ***қарама-қарсы*** *векторлар деп атайды.*

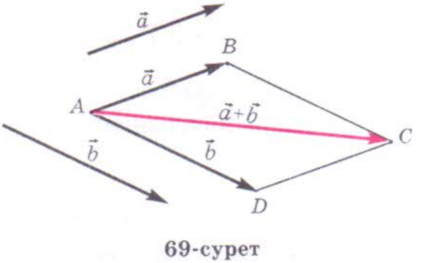
Анықтамадан қарама-қарсы векторлардың сәйкес координаталары қарама-қарсы таңбалы екені шығады.

Анықтама. *$\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының* ***айырымы*** *деп $\vec{b}$-мен қосылып $\vec{a}$ векторын беретін үшінші бір $\vec{c}$ векторын айтады.*

Егер $\vec{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ және $\vec{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$ болса, онда $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$ $(a_1-b_1; a_2-b_2; a_3-b_3)$.



68-сурет



69-сурет

Анықтама. *$\vec{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ векторының **k санына көбейтіндісі** деп $k\cdot\vec{a}=(k\cdot a_1;\ k\cdot a_2;\ k\cdot a_3)$ векторын айтады.*

Анықтамадан мына қасиеттер шығады:

1) $k\cdot(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$;

2) $(m+n)\cdot\vec{a}=m\cdot\vec{a}+n\cdot\vec{a}$ және $|k\cdot\vec{a}|=|k|\cdot\vec{a}$ (мұндағы k, m, n — нақты сандар).

$\vec{b}=x\cdot\vec{a}$ орындалатындай x саны табылса ғана нөлдік емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар болады. Мұндай x саны тек жалғыз ғана болады.

Бұл белгінің дәлелдемесі планиметрияда векторды санға көбейтудің анықтамасына сүйеніп келтірілген болатын.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Векторларды қосудың үшбұрыш ережесі мен көпбұрыш ережесінің арасындағы өзара байланыс қандай?
2. Параллелограмм ережесін екіден көп векторлар үшін қолдануға бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.

Есептер

О

113. $\vec{a}(4;\ 2;\ -4)$ және $\vec{b}(6;\ -4;\ 10)$ векторларының қосындысын табыңдар.

114. $\vec{a}\left(0;\ 5;\ \frac{1}{2}\right)$, $\vec{b}\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{4}\right)$, $\vec{c}\left(-\frac{1}{4};\ -\frac{11}{2};\ -\frac{5}{4}\right)$ векторларының қосындысын табыңдар.

115. 1) $\overrightarrow{MN}$ және $\overrightarrow{NK}$; 2) $\overrightarrow{RS}$ және $\overrightarrow{PR}$; 3) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ және $\overrightarrow{DA}$ векторларының қосындысын табыңдар.

116. 1) $\vec{a}(3;\ 3;\ 0)$ және $\vec{b}(2;\ 2;\ 7)$; 2) $\vec{m}(0;\ 2;\ 0)$ және $\vec{n}(0;\ -1;\ 0)$; 3) $\vec{p}(2;\ 1;\ 3)$ және $\vec{q}(4;\ 2;\ 6)$ векторлары коллинеар бола ма?

117. $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{PT}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{TR}$ өрнегін ықшамдаңдар.

118. $3(\vec{a}+\vec{b})-4(2\vec{a}-\vec{b})+\vec{a}$ өрнегін ықшамдаңдар.

119. $ABCD$ — квадрат. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. 1) $3\vec{a}$; 2) $2\vec{b}$; 3) $3\vec{a}+2\vec{b}$ векторларын салыңдар.

Ш

120. $\vec{a}(2;n;3)$ және $\vec{b}(3;2;m)$ векторлары берілген. m мен n-нің қандай мәндерінде берілген векторлар коллинеар болады?

121. $ABCD$ — параллелограмм. BC қабырғасында жатқан P нүктесі осы қабырғаны 1:4 қатынасындай етіп екі кесіндіге бөледі: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BP}=\vec{b}$. 1) $\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{DB}$-ны $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

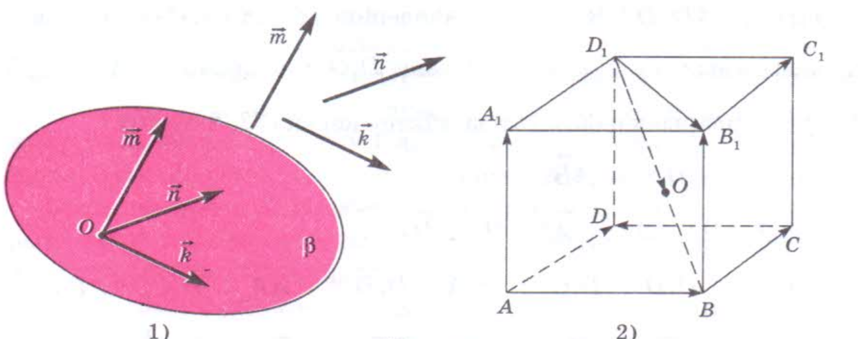
122. $ABCD$ трапециясының AD табаны BC табанынан үш есе ұзын, EF — трапецияның орта сызығы, $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$. 1) $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{EF}$ векторларын $\vec{a}$ векторы арқылы өрнектеңдер.

123. $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрыштың центрі O нүктесі. 1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}$; 2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AO}$ теңдіктерін дәлелдеңдер.

§ 21. Векторларды жіктеу

Анықтама. *Егер үш векторды бейнелейтін бағытталған кесінділер бір жазықтықта жатса немесе бір жазықтыққа параллель болса, онда олар* ***компланар*** *векторлар деп аталады* (70, 1-сурет).

70, 2-суреттегі $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{D_1B_1}$ векторлары компланар, себебі B_1D_1 кесіндісі ABD жазықтығына параллель, ал $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ және $\overrightarrow{AA_1}$ үштігі компланар емес, себебі AA_1 кесіндісі AB мен AD жатқан ABD жазықтығына параллель емес.

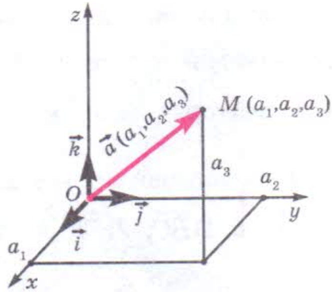


70-сурет

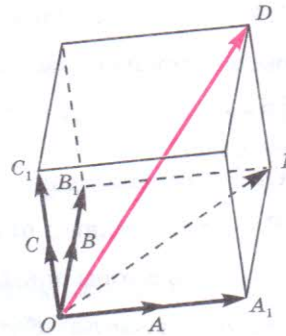
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AA_1}$ және $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BB_1}$ үштіктері де компланар емес.

Анықтама. *Егер үш векторды бейнелейтін бағытталған кесінділер бір жазықтықта жатпаса немесе бір жазықтыққа параллель болмаса, онда олар* ***компланар емес*** *векторлар деп аталады.*

Компланар емес үш вектор $\vec{i}\,(1;\ 0;\ 0)$, $\vec{j}\,(0;\ 1;\ 0)$ және $\vec{k}\,(0;\ 0;\ 1)$ **орттар** (*бірлік координаталық векторлар*) деп аталады.



71-сурет



72-сурет

Егер $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ векторы берілсе, онда $\vec{a}$ векторын әр кез $\vec{a} = a_1 \times \times \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}$ түрінде жазуға болады (71-сурет).

Векторды мұндай қосынды түрінде жазу берілген векторды орттар бойынша *жіктеп жазу* дейді.

Жалпы жағдайда компланар емес $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ үш вектор берілсе, онда кез келген $\overrightarrow{OD}$ векторын жалғыз ғана әдіспен $\overrightarrow{OD} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \times \times \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}$ түрінде жіктеп жазуға болады. Мұндағы x, y, z — нақты сандар (72-сурет).

Мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипед берілген. O — диагональдарының қиылысу нүктесі. $\overrightarrow{CD}$ және $\overrightarrow{D_1O}$ векторларын $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ векторларының бағытында жіктеу керек (72, 2-сурет).

Шешуі. $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$.

1) $\overrightarrow{CD} = 0 \cdot \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD}$;

2) $\overrightarrow{D_1B} = \overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1}$; $\overrightarrow{D_1D} = -\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{D_1A_1} = -\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{D_1B} = -\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{D_1O} = \frac{1}{2}\overrightarrow{D_1B}$,

$$\overrightarrow{D_1O} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Векторлардың коллинеарлығы мен компланарлығы арасында қандай байланыс бар?

O

124. Келесі векторларды орттар бойынша жіктеңдер:

1) $\vec{a}\,(2; 5; 8)$; 2) $\vec{b}\,(1; -1; 3)$; 3) $\vec{c}\,(7; 4; 2)$; 4) $\vec{d}\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{7}; -3\right)$.

125. 1) $\vec{c}\,(-5; 3; 0)$; 2) $\vec{d}\,(4; 0; 1{,}7)$; 3) $\vec{m}\,(0; -2{,}5; 0)$; 4) $\vec{n}\,(0; 0; 6)$ векторлары орттар бойынша қалай жіктеледі?

126. Орттар бойынша жіктелген мына векторлардың координаталарын анықтаңдар:

1) $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j} - 2{,}1\vec{k}$; 2) $\vec{b} = -9\vec{i} + \vec{k}$; 3) $\vec{c} = -\frac{1}{5}\vec{j}$;

4) $\vec{d} = \vec{i} - \vec{j}$.

127. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. $\overrightarrow{AD_1}$ векторын $\overrightarrow{DC_1}$, $\overrightarrow{CB_1}$, $\overrightarrow{BA_1}$ векторлары бойынша жіктеңдер.

Ш

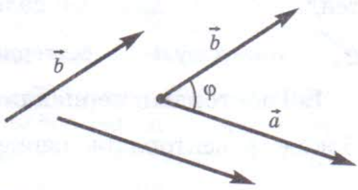
128. $MKPOM_1K_1P_1O_1$ кубы берілген. $\overrightarrow{MK_1} + \overrightarrow{PO_1} - \overrightarrow{KP_1}$ векторы қай вектордың жіктелуі болады?

129. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. $\overrightarrow{DA_1}$ векторын $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CD_1}$ векторлары бойынша жіктеңдер.

130. $MKPOM_1K_1P_1O_1$ — параллелепипед. $\frac{1}{2}\overrightarrow{MM_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MM_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{MO_1}$ векторы қай вектордың жіктелуі болады?

§ 22. Векторлардың скаляр көбейтіндісі

Векторлардың скаляр көбейтіндісінің анықтамасы. *Екі нөлдік емес вектордың арасындағы бұрыш* деп берілген векторларға тең векторларды бір нүктеден бастап салғанда пайда болатын бұрыштың шамасын айтады (73-сурет).



73-сурет

Анықтама. *Нөлдік емес екі вектордың* ***скаляр көбейтіндісі*** *деп векторлардың модульдерін сол векторлардың арасындағы бұрыштың косинусына көбейткенде шығатын санды айтады.*

Егер вектордың ең болмағанда біреуі нөлге тең болса, онда бұл екі вектордың скаляр көбейтіндісі нөлге тең.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісін $\vec{a} \cdot \vec{b}$ немесе $\vec{a}\,\vec{b}$ деп белгілейді. Сонымен, анықтама бойынша

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi, \text{ мұндағы } \varphi = (\widehat{\vec{a};\vec{b}}),\ 0° \leqslant \varphi \leqslant 180°. \qquad (1)$$

Егер $\vec{a} = \vec{b}$ болса, онда $\vec{a} \cdot \vec{b}$ скаляр көбейтіндісі $\vec{a} \cdot \vec{a}$ түріне келеді, ол $\vec{a}$ векторының *скаляр квадраты* деп аталып, $\vec{a}^2$ деп белгіленеді. $\cos(\widehat{\vec{a};\vec{a}}) = \cos 0° = 1$ болғандықтан, (1) теңдіктен $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ аламыз. Демек, вектордың скаляр квадраты оның модулінің квадратына тең. Бұдан $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$. Егер $\vec{a}$ бірлік вектор болса, онда $\vec{a}^2 = 1$.

Кеңістіктегі кез келген $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ үш вектор үшін мына қасиеттер орындалады.

1. $\vec{a}^2 \geqslant 0$ және $\vec{a}^2 \neq 0$ болса, $\vec{a}^2 > 0$;

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (көбейтудің орын алмастыру заңы);

3. $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ (скаляр көбейткішке қатысты терімділік заңы);

4. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (векторларды қосуға қатысты көбейтудің үлестірімділік заңы).

Кеңістіктегі векторлардың скаляр көбейтіндісінің 1—3 қасиеттері планиметриядағыдай дәлелденеді.

4-қасиет планиметрияда $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларының компланар жағдайы үшін дәлелденген.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторлары компланар емес жағдайда 4-қасиетті $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$ болатындай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедін құрып және

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^2;$$

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^2 \qquad (2)$$

теңдіктерін пайдаланып дәлелдеуге болады.

Дәлелдеуді өз беттеріңше жүргізіп көріңдер.

Екі вектордың перпендикулярлығының белгісі. Егер нөлдік емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары перпендикуляр болса, онда $(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = 90°$, яғни $\cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = \cos 90° = 0$. Демек, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$. Сонымен, $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow$ $\Rightarrow (\widehat{\vec{a} \cdot \vec{b}}) = 90° \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{a} \cdot \vec{b}}) = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Керісінше нөлдік емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары үшін

$\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow 0 \Rightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = 0 \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = 0 \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = 90° \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$, яғни

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0\,.$$

Сонымен, біз мынаны дәлелдедік: *нөлдік емес екі вектордың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болса ғана олар перпендикуляр болады.*

Координаталары берілген векторлардың скаляр көбейтіндісі. Координаталары $\vec{a}\,(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}\,(x_2, y_2, z_2)$ болатын $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табайық.

Векторларды қосудың және санға көбейтудің қасиеттерін пайдаланамыз:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} + z_2 \vec{k}) = (x_1; x_2)\, \vec{i}^{\,2} + x_1 y_2 (\vec{i} \cdot \vec{j}) +$$

$$+ x_1 z_2 (\vec{i} \cdot \vec{k}) + y_2 \cdot x_2 (\vec{i} \cdot \vec{j}) + y_1 \cdot y_2 \cdot \vec{j}^{\,2} + y_1 \cdot z_2 (\vec{j} \cdot \vec{k}) + z_1 x_2 (\vec{k} \cdot \vec{i}) + z_1 y_2 (\vec{k} \cdot \vec{j}) +$$

$$+ (z_1 \cdot z_2)\, \vec{k}^{\,2} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2,$$

яғни

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2. \qquad (3)$$

Бұл жерде біз

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0, \qquad (4)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \qquad (5)$$

теңдіктерін пайдаландық.

Сонымен, *координаталары берілген екі вектордың скаляр көбейтіндісі олардың аттас координаталарын көбейтіп қосқанға тең.*

Бұдан $\vec{a}\,(x_1, y_1, z_1)$ және $\vec{b}\,(x_2, y_2, z_2)$ векторларының перпендикулярлық белгісінің

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0 \qquad (6)$$

түрінде жазылатыны шығады.

$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}$ болғандықтан, $\vec{a}\,(x_1, y_1, z_1)$ векторының ұзындығы

$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ формуласынан табылады. (7)

Векторлардың скаляр көбейтіндісінің анықтамасынан $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы φ бұрышын

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (8)$$

формуласының көмегімен табуға болады.

1-мысал. $\vec{a}\,(1; -2; 2)$ және $\vec{b}\,(-4; 3; 0)$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

Шешуі. $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

Бұдан $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1\cdot(-4)+(-2)\cdot 3+2\cdot 0}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\sqrt{(-4)^2+3^2+0}} = \frac{-10}{3\cdot 5} = -\frac{2}{3}$.

Жауабы: $\cos\varphi = -\frac{2}{3}$.

2-мысал. $SABC$ дұрыс тетраэдрдің қыры m-ге тең, BC қабырғасының ортасы — D нүктесі. $\overrightarrow{AD}$ және $\overrightarrow{AS}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табу керек.

Шешуі. 55-суретті пайдаланамыз (§14). $|\overrightarrow{AS}| = m$, $|\overrightarrow{AD}| = \frac{\sqrt{3}}{2}m$,

$\cos\angle DAS = \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Олай болса, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AS} = \frac{\sqrt{3}}{2}m\cdot m\ \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2}m^2$.

Жауабы: $\frac{1}{2}m^2$.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Екі вектордың скаляр көбейтіндісінің кеңістіктегі анықтамасы мен жазықтықтағы анықтамасының бірдей болу мәні неде?

Есептер

О

131. ABC үшбұрышының C бұрышы тік. Ал $\angle B = 40^\circ$. Мына векторлардың арасындағы бұрышты табыңдар: 1) $\overrightarrow{CA}$ және $\overrightarrow{CB}$; 2) $\overrightarrow{BA}$ және $\overrightarrow{CA}$; 3) $\overrightarrow{CB}$ және $\overrightarrow{BA}$.

132. Мына векторлардың скаляр көбейтіндісін табыңдар: 1) $\vec{a}\,(1; 2; 4)$ және $\vec{b}\,(-8; 2; 1)$; 2) $\vec{p}\,(-2; -3; 1)$ және $\vec{q}\,(2; 3; 1)$.

133. n-нің қандай мәндерінде 1) $\vec{a}\,(2; -1; 3)$, $\vec{b}\,(1; 3; n)$; 2) $\vec{a}\,(n; -2; 1)$, $\vec{b}\,(n; -n; 1)$ векторлары перпендикуляр болады?

134. $\vec{m}\,(-2; 2; 1)$ және $\vec{n}\,(-1; 0; 1)$ векторларының арасындағы бұрышты табыңдар.

135. Төрт нүкте берілген: $A(0;1;-1)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;1;0)$, $D(2;-3;1)$. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{CD}$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

Ш

136. $\vec{a}\,(1;-5;2)$ және $\vec{b}\,(3;1;2)$ векторлары берілген. $2\vec{a}+\vec{b}$ және $3\vec{a}-2\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

137. $A(0; 1; -1)$, $B(1; -1; 2)$, $C(3; 1; 0)$ нүктелері берілген. ABC үшбұрышындағы C бұрышының косинусын табыңдар.

138. $DABC$ тетраэдрінің BC қырының ортасы — E нүктесі, ал AE кесіндісінің ортасы — O нүктесі. $\overrightarrow{DO}$ векторын $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

139. Егер $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-2\vec{j}$ болса, $\vec{m}=2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{n}=2\vec{a}-3\vec{b}$ векторларының ұзындығын, скаляр көбейтіндісін және арасындағы бұрышын табыңдар.

140. 1) $\vec{a}(1; -2; -1)$, $\vec{b}(3; 1; 2)$, $\vec{c}(5; -3; 0)$;

2) $\vec{p}(2; 0; -3)$, $\vec{i}$, $\vec{j}$; 3) $\vec{m}(2; 0; -3)$, $\vec{i}$, $\vec{j}$ векторлары компланар бола ма?

§ 23. Векторлардың қолданылуы

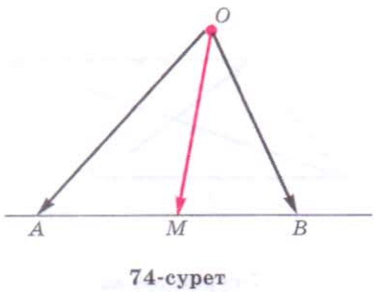
Векторлар математика мен физикада кеңінен қолданылады. Геометрияда векторлардың көмегімен жазықтықтың, түзудің, т.б. фигуралардың теңдеулерін қорытып шығарамыз және векторларды түрлі есептер шығаруда пайдаланамыз.

Векторларды қолдану үшін есептегі геометриялық және физикалық объектілердің арасындағы қатынастар вектор тіліне аударылады. Одан әрі алынған векторлық теңдіктер түрлендіріліп, қайтадан жай геометриялық немесе физикалық тілге келтіріледі.

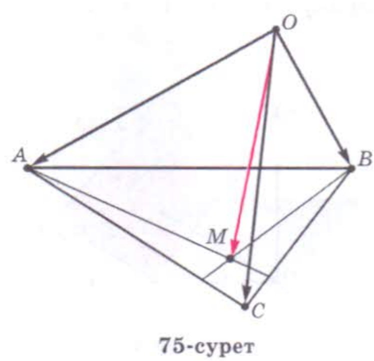
Мектеп курсында мына теңдіктер мен тұжырымдар жиі пайдаланылады.

1. AB және CD түзулері перпендикуляр болғанда, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$.



74-сурет



75-сурет

3. O — кеңістіктегі кез келген нүкте, ал M — AB кесіндісінің ортасы (74-сурет) немесе ABC үшбұрышы медианаларының қиылысу нүктесі (75-сурет) болса, онда

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \text{ немесе } \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Соңғы теңдіктерді дәлелдейік. Кез келген үш нүкте үшін $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OC}$ теңдіктерінің дұрыс екені белгілі. Алғашқы екеуін мүшелеп қосып, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ теңдігін ескерсек, онда $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, бұдан $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Жоғарыдағы теңдіктердің үшеуін мүшелеп қосып және $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ теңдігін ескерсек, онда $3 \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ немесе $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ (75-сурет).

Векторлардың математика және физикада қолданылуына бірнеше мысалдар келтірейік.

1-м ы с а л. $M(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінен өтетін және берілген $\vec{n}(a, b, c)$ векторына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін жазу керек.

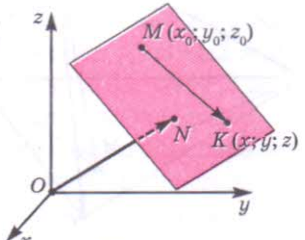
Ш е ш у і. Қарастырылып отырған α жазықтығында кез келген $K(x, y, z)$ нүктесін алайық (76-сурет). $\vec{n}$ (a, b, c) мен $\overrightarrow{MK}$ $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ векторлары перпендикуляр. Сондықтан олардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

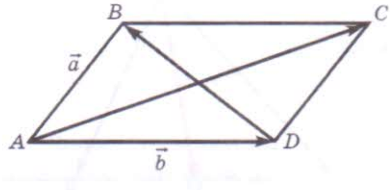
Бұл іздеп отырған α жазықтығының теңдеуі. Егер $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$ белгілеуін енгізсек, онда теңдеу мына түрде жазылады:

$$ax + by + cz + d = 0. \qquad (1)$$

Сонымен, α жазықтықтығында жатқан әрбір нүктенің x, y, z координаталары (1) теңдеуді қанағаттандырады. Сондай-ақ α жазық-



76-сурет



77-сурет

тығында жатпайтын нүктенің координаталары (1) теңдеуді қанағаттандырмайтынын да дәлелдеуге болады.

2 - м ы с а л. Параллелограмм диагональдарының квадраттарының қосындысы оның қабырғаларының квадраттарының қосындысына тең болатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у. $ABCD$ параллелограмм болсын (77-сурет). $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ және $\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}$ екені белгілі. Олардың екі жағын да өз-өзіне скаляр көбейтсек, онда $\overrightarrow{AC}^2=(\vec{a}+\vec{b})^2$ және $\overrightarrow{DB}^2=(\vec{a}-\vec{b})^2$.

Диагональдардың квадраттарының қосындысын табайық:

$$\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{DB}^2=(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2+\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=2(\vec{a}^2+\vec{b}^2).$$

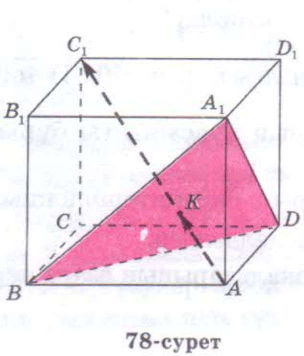
Енді $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ және $\vec{b}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ теңдіктерін ескерсек,

$$AC^2+DB^2=AB^2+BC^2+DC^2+DA^2$$

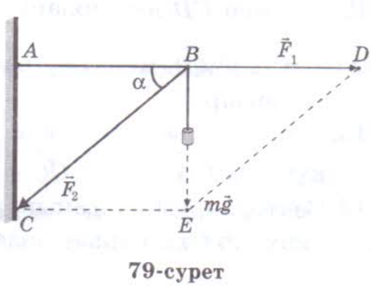
болады. Дәлелдеу керегі осы болатын.

3-м ы с а л. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — тікбұрышты параллелепипед, K — A_1BD үшбұрыштың медианаларының қиылысу нүктесі. AC_1 түзуінің K нүктесінен өтетінін дәлелдеу және K нүктесі AC_1 кесіндісін қандай қатынаста бөлетінін табу керек (78-сурет).

Ш е ш у і. K—A_1BD үшбұрышы медианаларының қиылысу нүктесі болғандықтан, $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{D_1C_1}$ және $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A_1D_1}$ екенін ескерсек, $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{AC_1}$, яғни $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$. Бұл теңдік K нүктесінің AC_1 түзуінде жатқанын көрсетеді. Екіншіден, $AC_1=3\cdot AK$, демек, $AK:KC_1=1:2$. Есеп шешілді.



78-сурет



79-сурет

4-м ы с а л. 79-суретте көрсетілген AB және BC шыбықтарына (стержень) әрекет етуші күштерді табыңдар. $\alpha = 40°$, $F = mg = 20$ Н.

Ш е ш у і. $BDEC$ параллелограмын қарастырамыз. Шыбықтарға әрекет ететін күштер параллелограмның BD және BC қабырғаларымен бағытталған. BCE үшбұрышынан $BE = 20$ катеті және $\angle CBE = 50°$ белгілі деп есептеп, оның CE катетін және BC гипотенузасын табамыз. Сонда $BD = CE = \left|\vec{F}_1\right| = 20\text{tg}50° \approx 23{,}8$ (Н), $|\overline{BC}| = \left|\vec{F}_2\right| = \frac{20}{\cos 50°} \approx$ $\approx 31{,}1$ (Н).

5- м ы с а л (скаляр көбейтіндінің физикада қолданылуы). Қозғалыс бағытына 45° бұрышпен әрекет ететін 16 Н күш денені 4 м қашықтыққа жылжытады. Осы күштің жасайтын жұмысын табыңдар.

Ш е ш у і. Әрекет етуші күшті $\vec{F}$, сол дененің қозғалу бағытын $\vec{s}$ деп белгілейік. Сонда $\left|\vec{F}\right| = 16$, $\left|\vec{s}\right| = 4$ м, $\varphi = (\widehat{\vec{F}, \vec{s}}) = 45°$ шығады.

Орындалған жұмысты анықтау үшін $A = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{s}\right| \cdot \cos\varphi$ формуласын пайдалансақ, $A = 16 \cdot 4 \cdot \cos 45° \approx 49$ Дж.

Күштің әрекет ету бағыты дененің қозғалу бағытымен бағыттас болса, онда $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$, ал жұмысты есептеу формуласы $A = F \cdot s$ болады.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Неліктен кейбір есептер векторды қолданғанда оңай шешіледі?

Есептер

О

141. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}$ векторлары бір нүктеден бастап салынған. $\vec{a} + \vec{b}$ векторы $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрышты қақ бөлетін болса, $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары қандай векторлар?

142. $\overrightarrow{AB}$ мен $\overrightarrow{CD}$ векторларының арасындағы бұрыш 60°. 1) $\overrightarrow{BA}$ мен $\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ мен $\overrightarrow{DC}$ векторларының арасындағы бұрышты табыңдар.

143. ABC — дұрыс үшбұрыш, O — үшбұрыш биіктіктерінің қиылысу нүктесі, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ екенін дәлелдеңдер.

144. Векторларды қолданып, ромб диагональдарының өзара перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

145. Катер көлде солтүстік-батыс бағытта 2 км, одан соң солтүстік бағытта 1 км қозғалады. Масштаб таңдап алып, катердің орын ауыстыру векторын және оның ұзындығын табыңдар.

III

146. Табаны ABC үшбұрышы болатын $ABCD$ тетраэдры берілген. Оның барлық қырлары тең. DA кесіндісінің ортасы — E нүктесі, ал BC қабырғасының ортасы — F нүктесі. $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ болатынын дәлелдеңдер.

147. Тіктөртбұрыш диагональдарының өзара тең болатынын векторлық әдісті қолданып дәлелдеңдер.

148. Тікбұрышты үшбұрыштың тік бұрышының төбесінен гипотенузаға түсірілген биіктік гипотенуза кесінділерінің пропорционал ортасы болатынын дәлелдеңдер.

149. Үшбұрыштың орта сызығы оның табанына параллель және табанының жартысына тең болатынын дәлелдеңдер.

150. Трапецияның орта сызығы оның табандары қосындысының жартысына тең болатынын дәлелдеңдер.

Қосымша есептер

О

151. $ABCD$ трапециясының A және D төбелері α жазықтығында, ал B және C төбелері α жазықтығынан тыс жатыр. 1) AD трапецияның табаны; 2) AD трапецияның бүйір қабырғасы болса, онда BC кесіндісі α жазықтығына қарағанда қалай орналасқан?

152. ABC үшбұрышының B, C төбелері α жазықтығында, ал A төбесі жазықтықтан тыс жатыр. α жазықтығына қарағанда үшбұрыштың орта сызығы қалай орналасқан?

153. a және b түзулері параллель. BC түзуін B нүктесінде қиып өтетін b түзуі a түзуімен қиылыспайды. a және BC түзулері қалай орналасқан?

154. Егер $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының жағындағы диагональдің ұзындығы $6\sqrt{2}$ см, ал диагоналі $6\sqrt{3}$ см болса, онда A төбесінен әрбір жағына дейінгі қашықтықты табыңдар.

155. ABC тікбұрышты үшбұрышында $\angle C = 90^\circ$. BC катеті α жазықтығында жатыр. Үшбұрыш жазықтығы мен α жазықтығының арасындағы бұрыш 30°. $AB=13$ см, $BC=5$ см. A төбесінен α жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

156. α жазықтығы берілген. MNK үшбұрышының NK қабырғасы α жазықтығында жатыр: MN=2 дм, $\angle MNK=30^\circ$. Үшбұрыш жазықтығы мен α жазықтығының арасындағы бұрыш 45°-қа тең. 1) M нүктесінен NK түзуіне дейінгі; 2) M нүктесінен α жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

157. Тікбұрышты әрі теңбүйірлі ABC және ADC үшбұрыштары өзара тең, AC — ортақ гипотенуза және AC =4 см. Үшбұрыш жазықтықтары өзара перпендикуляр. B мен D нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.

158. Параллель AB және CD түзулері α жазықтығын A және C нүктелерінде қиып өтеді. B мен D нүктелері жазықтықтың бір жағында жатыр: AB=4см, CD=3 см, AC=2 см. 1) BD түзуі α жазықтығын қайсыбір K нүктесінде қиып өтетінін дәлелдеңдер. 2) CK кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

159. Параллель MN және EF түзулері α жазықтығын M және N нүктелерінде қиып өтеді. N және F нүктелері α жазықтығының әр түрлі жағында жатыр: MN=2 см, EF=6 см, ME =6 см. NF түзуі α жазықтығын P нүктесінде қияды. NF, MP, PE кесінділерінің ұзындықтарын табыңдар.

160. CD көлбеуінің ұзындығы 40 дм, ал оның CC_1 перпендикулярының ұзындығы 20 дм. CD түзуі мен жазықтық арасындағы бұрышты табыңдар.

161. Егер теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрыштың бір катеті жазықтықпен 45° бұрыш жасаса, онда гипотенуза мен жазықтық арасындағы бұрыш 30°-қа тең болатынын дәлелдеңдер.

162. Арақашықтығы 2 м болатын екі параллель жазықтықтарды қиып өтетін түзу олармен 60° бұрыш жасайды. Түзудің параллель жазықтықтар арасындағы бөлігінің ұзындығын табыңдар.

163. M нүктесі перпендикуляр жазықтықтардан 12 см және 5 см қашықтықта орналасқан. Осы нүктеден жазықтықтардың қиылысу түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

164. Егер екіжақты бұрыштың бір жағынан алынған нүктеден екінші жағына дейінгі қашықтық осы нүктеден оның қырына дейінгі қашықтықтан екі есе қысқа болса, онда екіжақты бұрыштың бұрыштық өлшемін табыңдар.

III

165. Жазықтықтан h қашықтықта жатқан нүктеден берілген жазықтықпен 45° бұрыш жасайтын екі көлбеу жүргізілген. Олардың арасындағы бұрыш 60°-қа тең. Көлбеулердің табандарының арақашықтығын табыңдар.

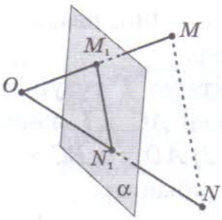
166. $ABCD$ квадратының қабырғасы 1,2 дм. E нүктесі оның бір төбесінен 1,2 дм қашықтықта орналасқан. ED түзуінің квадрат жазықтығымен жасайтын бұрышын анықтаңдар.

167. Бір-біріне перпендикуляр α және β жазықтықтары l түзуінің бойымен қиылысады. $A \in \alpha$, $B \in \beta$ нүктелерінен $AC \perp l$ және $BD \perp l$ түсірілген. Егер 1) $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$; 2) $AD = a$, $BC = b$, $CD = c$ болса, онда AB кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

168. α және β жазықтықтары берілген. $\alpha \perp \beta$ және $\alpha \cap \beta = d$. α жазықтығында $a \parallel d$, ал β жазықтығында $b \parallel d$ жүргізілген. α мен d-ның арақашықтығы 15 см, b мен d-ның арақашықтығы 8 см болса, онда a мен b түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

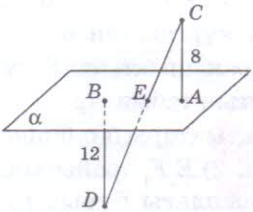
169. $MNEF$ және MNE_1F_1 квадраттарының жазықтықтары бір-біріне перпендикуляр, $|MN| = m$. 1) EE_1 аралығын; 2) E_1F_1 аралығын; 3) ME және ME_1 диоганальдарының арасындағы бұрышты табыңдар.

1-тест



1. $OM_1 = MM_1$, $ON_1 = N_1N$, $M_1N_1 = 2{,}6$ см, MN — ?

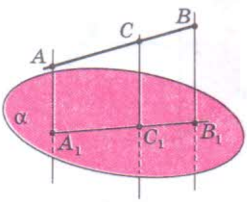
A. 3,6. B. 6,2.
C. 5,2. D. 4,2.
E. 3,2.



2. $A \in \alpha, B \in \alpha$, $AC \parallel BD$, $AC = 8$, $BD = 12$, $AB = 6$, $E = DC \cap \alpha$, AE — ?

A. 2,4. B. 2,2. C. 1,8.
D. 1,6. E. 1,4.

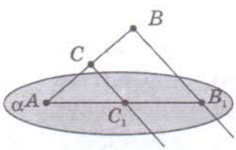
3. $AC : CB = 4{:}3$,



$AA_1 \parallel CC_1 \parallel BB_1$,

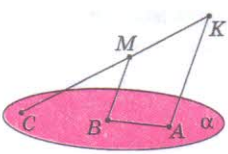
$A_1 \in \alpha$, $C_1 \in \alpha$, $B_1 \in \alpha$. $A_1C_1 : C_1B_1$ қатынасын табыңдар.

A. 2:3. B. 1:2.
C. 2:1. D. 4:3.
E. 3:4.



4. $A \in \alpha$, $AC = CB$, $CC_1 \parallel BB_1$, $BB_1 = 12$ см. CC_1 кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

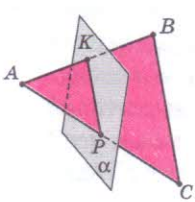
A. 3. B. 4.
C. 5. D. 6.
E. 8.



5. $A \in \alpha, B \in \alpha$, $AK \parallel BM$, $AK = 16$, $MB = 12$, $AB = 9$, $C = MK \cap \alpha$.

AC кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

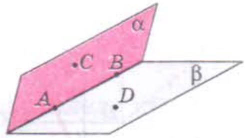
A. 24. B. 27.
C. 32. D. 36.
E. 42.



6. α — жазықтық, ABC — үшбұрыш. $AK = KB$, $AP = PC$. $\dfrac{S_{ABC}}{S_{AKP}}$ — ?

A. 2:1. B. 1:2.
C. 1:4. D. 4:1.
E. 2:3.

7. Қайсысы дұрыс?



A. $D \in \alpha$.

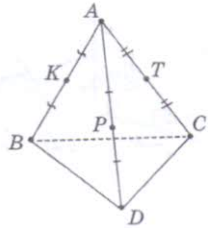
B. $C \in \beta$.

C. AB мен CD — айқас түзулер.

D. AB мен CD — параллель түзулер.

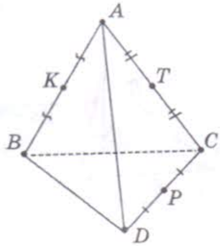
E. AB мен CD — қиылысатын түзулер.

8. Тетраэдрдің KPT жазықтығымен қимасы қандай фигура болады?



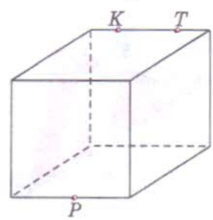
A. Үшбұрыш. B. Төртбұрыш.
C. Бесбұрыш. D. Ромб.
E. Квадрат.

9. Тетраэдрдің KPT жазықтығымен қимасы қандай фигура болады?



A. Үшбұрыш. B. Төртбұрыш.
C. Бесбұрыш. D. Трапеция.
E. Дөңгелек.

10. Кубтың KPT жазықтығымен қимасы қандай фигура болады?



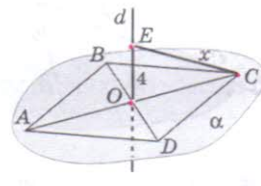
A. Тіктөртбұрыш. B. Трапеция.

C. Үшбұрыш. D. Ромб.

E. Квадрат.

2-тест

1. $ABCD$ — квадрат, $d \perp \alpha$,
$AC = 8$ см, $OE = 4$ см. $EC = x$—?

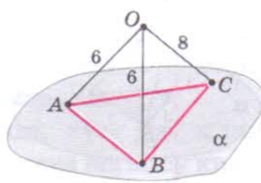


A. $2\sqrt{2}$. B. $3\sqrt{2}$.

C. $4\sqrt{2}$. D. $5\sqrt{2}$.

E. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

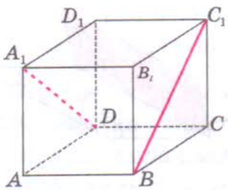
2. $OA \perp OB \perp OC$, $OA = OB = 6$ см,
$OC = 8$ см. $P = AB + BC + CA$ — ?



A. $10\sqrt{2}$. B. $20 + 6\sqrt{2}$.

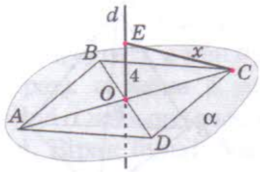
C. $10 + 8\sqrt{2}$. D. $20 + 3\sqrt{2}$.

E. $10 + 4\sqrt{2}$.



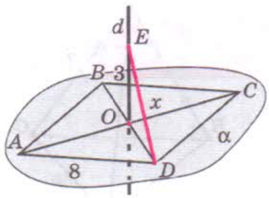
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. A_1D және BC_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

A. 45°. B. 60°.
C. 70°. D. 80°.
E. 90°.



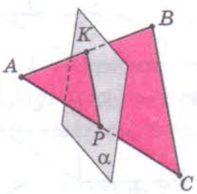
4. $ABCD$ — ромб, $d \perp \alpha$, $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = 6$ см, $OE = 4$ см. $EC = x$—?

A. $10\sqrt{3}$. B. $\sqrt{41}$.
C. $2\sqrt{17}$. D. 6.
E. $\sqrt{43}$.



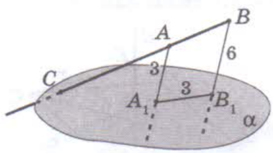
5. $ABCD$ — ромб, $d \perp \alpha$, $\angle ADC = 120^\circ$, $AD = 8$ см, $OE = 3$ см, ED — ?

A. 5. B. $5\sqrt{2}$.
C. $5\sqrt{3}$. D. 8.
E. $8\sqrt{2}$.



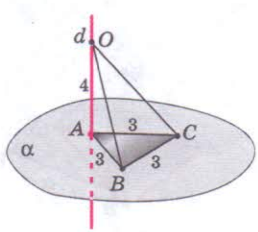
6. ΔABC, $\angle B = 90^\circ$, $AB \perp \alpha$, $AA_1 : A_1B =$ $=7:11$. $AC_1 : C_1C$ —?

A. 4:5. B. 7:5.
C. 5:7. D. 7:11.
E. 11:7.



7. $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$, $BB_1 = 6$ см, $A_1B_1 =$ $= AA_1 = 3$ см. A_1C — ?

A. 2. B. 3.
C. 4. D. 5.
E. 6.

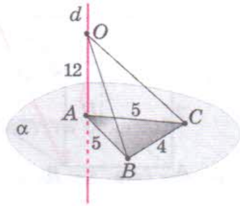


8. Δ ABC — теңқабырғалы үшбұрыш. $d \perp \alpha$, $AB = 3$см, $AO = 4$ см. S_{OBC}—?

A. $\frac{3\sqrt{91}}{4}$. B. $\frac{4\sqrt{91}}{3}$.
C. $\frac{\sqrt{91}}{4}$. D. $9\sqrt{3}$.
E. $10\sqrt{3}$.

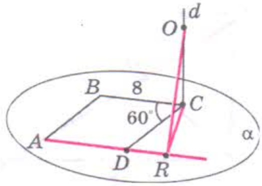
9. $d \perp \alpha$, $AB = AC = 5$ см,
$BC = 4$ см, $AO = 12$ см.
$P = OB + OC + BC$ — ?

A. 22. B. 24.
C. 26. D. 28.
E. 30.



10. $ABCD$ — ромб. $d \perp \alpha$, $OR \perp AD$,
$\angle BCD = 60^\circ$, $AB = 8$ см. CR —?

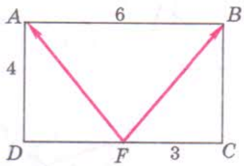
A. $2\sqrt{3}$. B. $3\sqrt{3}$.
C. $4\sqrt{3}$. D. $5\sqrt{3}$.
E. $3\sqrt{2}$.



3-тест

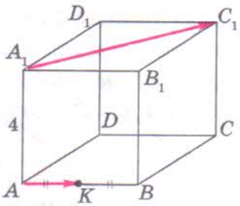
1. $ABCD$ — тіктөртбұрыш.
$\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB}$ — ?

A. 8. B. −8.
C. −7. D. 7.
E. 11.



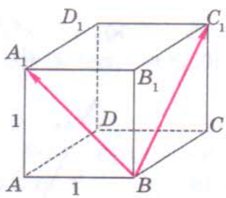
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.
$AK = KB = 2$ см.
$\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{A_1C_1}$ — ?

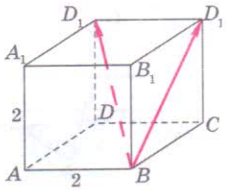
A. 4. B. $-4\sqrt{2}$.
C. $5\sqrt{2}$. D. 6.
E. 8.



3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.
$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$ — ?

A. 1. B. 2.
C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.
E. $2\sqrt{2}$.

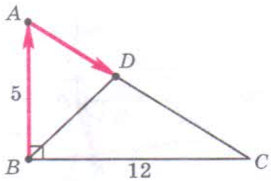




4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.

$\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$ — ?

A. 4. B. –5.
C. 6. D. 8.
E. 9.



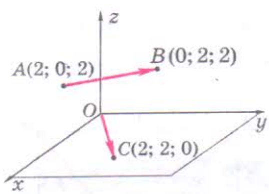
5. BD — биссектриса.

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD}$ — ?

A. 25. B. 17.

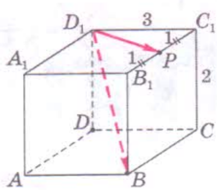
C. –25. D. $\frac{25}{17}$.

E. $-\frac{125}{17}$.



6. $Oxyz$ тік бұрышты координаталар жүйесі. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}$ — ?

A. –2. B. 2.
C. 1. D. –1.
E. 0.

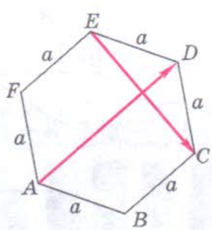


7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — тікбұрышты параллелепипед. $\overrightarrow{D_1P} \cdot \overrightarrow{D_1B}$ — ?

A. $\sqrt{10}$. B. 11.

C. –11. D. $-\sqrt{10}$.

E. $\sqrt{15}$.



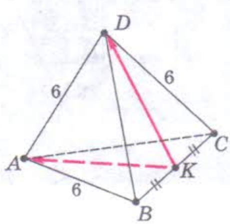
8. $ABCDEF$ — дұрыс алтыбұрыш.

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EC}$ — ?

A. a^2. B. $-a^2$.

C. $2a^2$. D. $-\frac{a^2}{2}$.

E. 0.



9. $ABCD$ — дұрыс тетраэдр.

$\overrightarrow{KD} \cdot \overrightarrow{KA}$ — ?

A. 9. B. –12.
C. 18. D. 21.
E. 24.

10. $ABCD$ — дұрыс тетраэдр.

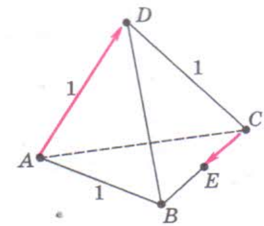
$BE = CE$.

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CE}$ — ?

A. 0. B. −1.

C. 1. D. $\sqrt{2}$.

E. $2\sqrt{2}$.



4-тест

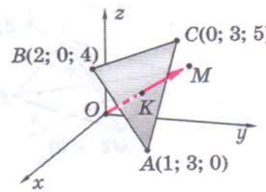
1. K — медианалардың қиылысу нүктесі.

$OK = OM$. $\overrightarrow{OM}(x; y; z)$ — ?

A. (2; 1; 3). B. (1; 2; 3).

C. (2; −4; 6). D. (2; 6; 4).

E. (2; 4; 6).



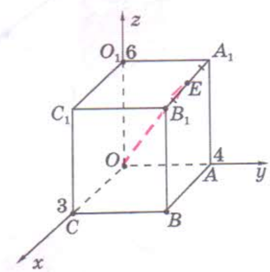
2. $B_1E = EA_1$, $\overrightarrow{OE} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

x — ? y — ? z — ?

A. (3; 2; 6). B. (3; −2; 6).

C. $(\frac{2}{3}; 4; 6)$. D. $(\frac{3}{2}; 4; 6)$.

E. (3; 4; 3).

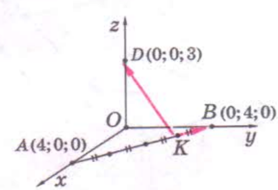


3. $BK = \frac{1}{4}AB$. $\overrightarrow{KD} \cdot \overrightarrow{KB}$ — ?

A. 1. B. 2.

C. −1. D. −2.

E. 0.



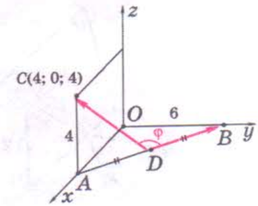
4. $AD = DB$, $\varphi = \angle CDB$,

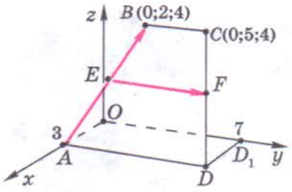
$C(4; 0; 4)$. $\cos\varphi$ — ?

A. $-\sqrt{\frac{13}{19}}$. B. $-\frac{13}{19}$.

C. $\frac{13}{19}$. D. $\frac{5}{19}$.

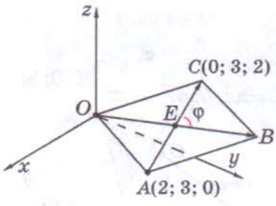
E. $-\frac{5}{19}$.





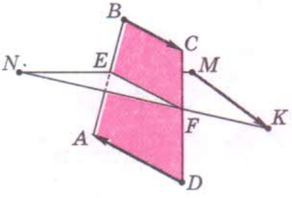
5. $ABCD$ — трапеция, EF — трапецияның орта сызығы. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF}$ — ?

A. 10. B. 8.
C. 7. D. 6.
E. 5.



6. $OABC$ — параллелограмм.
$\varphi = \angle BEC$, φ — ?

A. 90°. B. 45°.
C. –45°. D. 30°.
E. 60°.



7. $ABCD$ — трапеция, EF — трапецияның да, үшбұрыштың да орта сызығы.

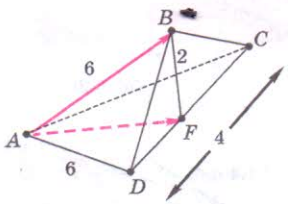
$\overrightarrow{BC}\,(2;\,1;\,-2)$, $\overrightarrow{DA}\,(-5;\,-\frac{5}{2};\,5)$,

$\overrightarrow{MK}\,(x;\,y;\,z)$ — ?

A. $(-3;\,-\frac{3}{2};\,3)$. B. $(-7;\,-\frac{7}{2};\,7)$.

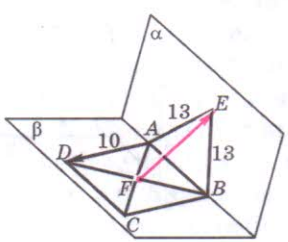
C. $(7;\,\frac{7}{2};\,-7)$. D. $(\frac{7}{2};\,7;\,-7)$.

E. $(-7;\,7;\,\frac{7}{2})$.



8. $AB = AC = AD = 6$ см,
$DC = 4$ см, $BF = 2$ см,
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$ — ?

A. 22. B. 24.
C. 27. D. 30.
E. 32.

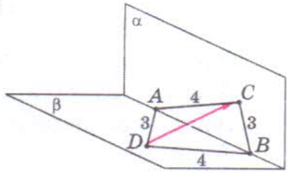


9. $\overrightarrow{AD} = 10$ см, $|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{BE}| = 13$ см,

$ABCD$ — квадрат, $\alpha \perp \beta$, $|\overrightarrow{FE}|$ — ?

A. 10. B. 12.
C. 13. D. 14.
E. 15.

10. $\alpha \perp \beta$, $AD = BC = 3$ см, $BD = AC = 4$ см,



$\varphi = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$, $\cos\varphi$ — ?

A. $\frac{7}{\sqrt{237}}$. B. $\frac{7}{\sqrt{337}}$.

C. $\frac{5}{\sqrt{337}}$. D. $\frac{5}{\sqrt{237}}$.

E. $\frac{3}{5}$.

ЖАУАПТАР МЕН НҰСҚАУЛАР

I тарау

2. Жоқ; жоқ. **3.** Жоқ; мүмкін. **4.** A нүктесінде қиылысады. **6.** 1) Үш; 2) төрт. **8.** 26 см. **10.** 6 см, 9 см. **15.** Шықпайды. **16.** Мүмкін. **19.** 4:1. **20.** Шексіз көп. **24.** Жоқ. **25.** Жеткілікті. **29.** 36 см. **30.** Жоқ, болмайды. **32.** Жоқ, болмайды. **36.** $\frac{a \cdot c}{b}$. **37.** 3 см; 10 см. **38.** 16 см. **39.** 1) Параллель; 2) параллель; 3) 3 см; 4) 10 см. **40.** 1) 6 см; 2) 8 см; 3) 6 см. **41.** 1) 6 см; 2) 4 см; 3) 15 см. **43.** Қиылысуы немесе параллель болуы мүмкін. **44.** 9 см. **45.** 4 см. **46.** $\sqrt{2}$ см. **47.** 45°. **48.** 3 см.

II тарау

50. Болуы мүмкін. **51.** Осындай барлық нүктелер шеңбер құрайды. **52.** 5 см. **53.** 10 см; $2\sqrt{43}$ см. **54.** 1) $\approx 15\sqrt{2}$ см; 2) $3a\sqrt{2}$ см; 3) ≈ 14 дм. **55.** 9 см. **56.** 6 см; 4,8 см. **57.** Бұлай болуы мүмкін емес. **58.** 30°. **59.** 9 см; 6 см. **60.** 5 см. **61.** 3 см; $3\sqrt{2}$ см. **62.** 8 см. **63.** 1) 26 см; $3\sqrt{91}$ см^2; 2) $(1 + 2\sqrt{2})$; $\frac{\sqrt{7}}{4}a^2$. **64.** 10 немесе $10\sqrt{8}$. **65.** Берілген шеңбердің ортасына. **66.** 1) 3 см; 2) 10 дм; 3) $4\sqrt{15}$ см. **67.** $\sqrt{7}$ см; 4 см; $\approx 3{,}4$ см. **69.** 5 дм; 16 дм. **70.** Радиусы 0,6 м және центрі перпендикуляр табанында болатын шеңбер. **71.** 1) 15 см, 41 см; 2) 15 см, 41 см. **72.** 25 см. **73.** $\sqrt{a^2 - h^2}$. **74.** 5 см. **75.** 1) 4 см; 2) 3,6 см. **76.** a. **77.** 35 дм. **78.** 6 дм. **79.** 8 м. **80.** 2 см. **81.** 3 см. **82.** Болады, шексіз көп. **83.** 1) $12\sqrt{3}$ см, 12 см; 2) 16 см, $8\sqrt{3}$ см; 3) $10\sqrt{3}$ см, $5\sqrt{3}$ см. **84.** 50°. **85.** 45°. **86.** $3\sqrt{2}$ дм. **87.** $12\sqrt{3}$ см. **88.** $6\sqrt{2}$ см. **89.** Косинустар теоремасын қолданыңдар. **90.** ≈ 44 м. **91.** 6 см.

III тарау

97. $M_1(0;3;5)$ нүктесі арқылы Ox осіне параллель өтеді. **98.** $4\sqrt{2}$; $\sqrt{41}$. **99.** xy жазықтығына дейінгі қашықтық 3-ке, xz жазықтығына дейінгі қашықтық 2-ге, yz-ке дейінгі қашықтық 2-ге тең; x, y, z координаталық осьтеріне дейінгі қашықтықтар сәйкесінше $\sqrt{13}$, $\sqrt{13}$, $2\sqrt{2}$ -ге тең; координаталар басына дейінгі қашықтық $\sqrt{17}$ -ге тең. **100.** A нүктесі жақын. **101.** -4. **102.** $R(0; -2; 0)$. **103.** $K\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$. **104.** 0. **106.** $D(-1; 7; -2)$. **107.** Иә; жоқ. **108.** $\overrightarrow{AB}(1; 3; 3)$. **109.** $C(6; 4; -3)$. **110.** $|\vec{m}| = \sqrt{14}$; $|\vec{n}| = \sqrt{41}$. **111.** $x = \pm 3$. **112.** $\vec{a}(6; -3; 3)$ немесе $\vec{a}(-6; 3; -3)$. **114.** $\vec{d}(0; 0; \frac{5}{2})$. **115.** 3) $\vec{0}$. **116.** 1) Жоқ; 2) иә; 3) иә. **117.** $\vec{0}$. **124.** 2) $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$. **125.** 2) $\vec{d} = 4\vec{i} + 1{,}7\vec{k}$. **126.** 1) $\vec{a}(4; 1; -2{,}1)$. **127.** $\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{BA_1}$. **128.** $\overrightarrow{OM_1}$. **129.** $\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CD_1}$. **130.** $\frac{1}{2}\overrightarrow{OM_1}$. **131.** 90°, 50°, 140°.

132. 1) 0; 2) –12. **133.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) –1. **134.** 45°. **135.** $\frac{5\sqrt{7}}{21}$. **136.** 150. **137.** $\cos C = \sqrt{\frac{2}{15}}$.
138. $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{4}(2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. **139.** $4\sqrt{6}$; $4\sqrt{6}$; –48; 120°. **140.** А) Жоқ, компланар емес. **141.** $\vec{a}, \vec{b}$ — ромб қабырғалары.

Қосымша есептер

151. 1) Параллель; 2) қиылысады. **152.** Жазықтыққа паралелль. **153.** Айқас. **154.** 0;6 см. **155.** 6 см. **156.** 1 дм; $\frac{\sqrt{2}}{2}$ дм. **157.** $2\sqrt{2}$ **158.** 2) 6 см. **159.** 10 см; 1,5см және 4,5 см. **160.** 30. **163.** 13 см. **165.** $h\sqrt{2}$. **166.** 45°. **167.** 1) $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$; 2) $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$. **168.** 17 см. **169.** 1) $m\sqrt{2}$; 3) 60°.

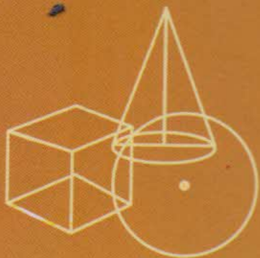
МАЗМҰНЫ

ИБ № 3845

Басуға 16.06.14 қол қойылды. Пішімі $60x90^1/_{16}$. Офсеттік қағаз. Қаріп түрі "Школьная". Офсеттік басылыс. Шартты баспа табағы 5,0.
Шартты бояулы беттаңбасы 10,5. Есептік баспа табағы 3,93.
Таралымы 21 000 дана (II зауыт). Тапсырыс № 016.

ҚОҒАМДЫҚ-ГУМАНИТАРЛЫҚ БАҒЫТ

ГЕОМЕТРИЯ



МЕКТЕП БАСПАСЫ

ISBN 978-601-07-0032-1

9 786010 700321