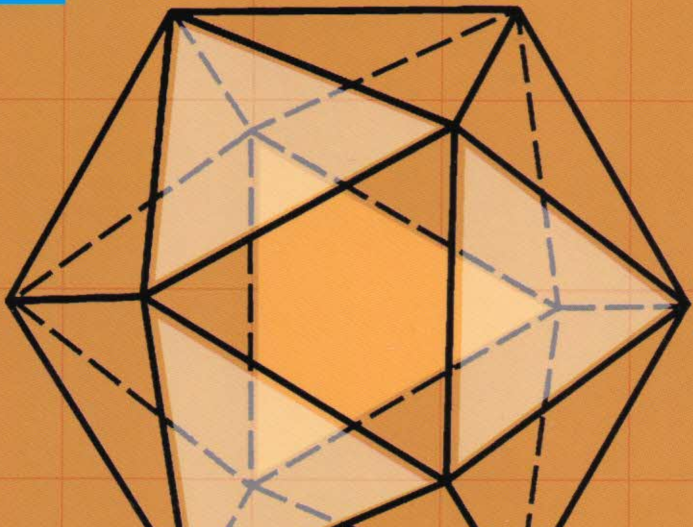
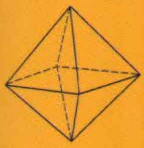
МЕКТЕП
БАСПАСЫ

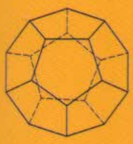
ҚОҒАМДЫҚ-
ГУМАНИТАРЛЫҚ
БАҒЫТ

В. Гусев Ж. Қайдасов Ә. Қағазбаева

# ГЕОМЕТРИЯ







11

В. Гусев, Ж. Қайдасов, Ә. Қағазбаева

# ГЕОМЕТРИЯ

Жалпы білім беретін мектептің
қоғамдық-гуманитарлық бағытындағы
11-сыныбына арналған оқулық

Өңделіп, толықтырылған үшінші басылымы

*Қазақстан Республикасының*
*Білім және ғылым министрлігі бекіткен*

Алматы “Мектеп” 2015

УДК 373.167.1
ББК 22.151я72
Г31

**Шартты белгілер:**

?! — сұрақтар мен тапсырмалар

✍ — параграф ішіндегі тапсырмалар

‖ — қосымша материалдар

**Гусев В., т.б.**
Г31 **Геометрия.** Жалпы білім беретін мектептің қоғамдық-гуманит. бағытындағы 11-сыныбына арналған оқулық / В. Гусев, Ж. Қайдасов, Ә. Қағазбаева. — Өнд., толықт. 3-бас. — Алматы: Мектеп, 2015. — 72 б., сур.

ISBN 978—601—07—0381—0

$$\text{Г}\frac{1602050000—061}{404(05)—15}66(1)—15$$

УДК 373.167.1
ББК 22.151я72

ISBN 978—601—07—0381—0

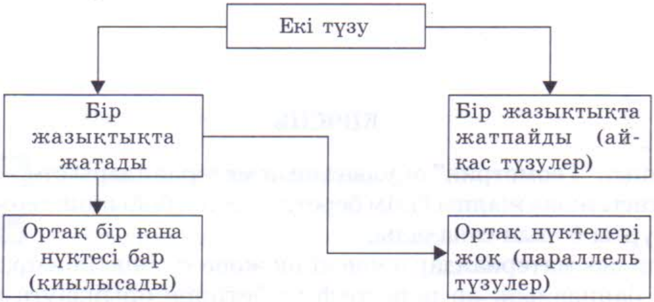
# КІРІСПЕ

11-сынып “Геометрия” оқулығының материалдары стереометрияның жалғасы және жалпы білім беретін мектеп бойынша геометрияны аяқтау курсы болып саналады.

Теориялық материалдар көрнекілік және түсініктілік принциптері негізінде баяндалып, әр параграф өз бетінше орындауға арналған жаттығулармен қамтамасыз етілген. Оның мақсаты — негізгі теориялық материалдарды игеруге қажетті әдіс-тәсілдерді меңгеруге бағыт-бағдар беру.

# 10-сынып геометрия курсын қайталауға арналған материалдар

Кеңістікте екі түзу өзара қалай орналасуы мүмкін?



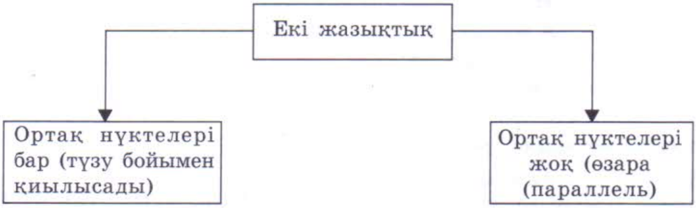
Егер кеңістіктегі екі түзу бір жазықтықта жатпаса, олар *айқас түзулер* деп аталады.

*Айқас түзулердің белгісі.* Егер бір түзу жазықтықта жатса, ал екіншісі оны бірінші түзуде жатпайтын нүктеде қиып өтсе, онда бұл түзулер айқас түзулер болады.

Түзу жазықтыққа қарағанда қалай орналасуы мүмкін?

Егер түзудің жазықтықпен ортақ нүктелері болмаса, *түзу жазықтыққа параллель* деп аталады.

Қандай екі жазықтық параллель жазықтықтар деп аталады?



### *Коллинеар және компланар векторлар*

Бір нүктеден бастап өлшеп салғанда бір түзудің бойында орналасқан екі вектор *коллинеар векторлар* деп аталады.

$\vec{a}$ және $t \cdot \vec{a}$ векторлары бір-біріне қатысты қалай орналасады? $\vec{a}$ және $t \cdot \vec{a}$ векторлары коллинеар бола ма? Коллинеар векторлардың қиылысқан екі түзуде орналасуы мүмкін бе?

Нөлдік емес үш векторды бір нүктеден өлшеп салғанда бір жазықтықта жатса, онда олар *компланар* векторлар деп аталады.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілсін.

1) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$, $\overrightarrow{C_1C}$; 2) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$; 3) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DD_1}$ векторлары компланар бола ма?

### *Параллель проекциялау*

Қандай жағдайда параллель екі түзудің параллель проекциялары бір түзу болады?

Параллель проекциялауда кесінділердің ұзындықтары сақтала ма?

Қандай жағдайда түзудің параллель проекциясы нүкте болады?

Параллель проекциялауда бұрыштардың шамалары сақтала ма?

Бір табаны екінші табанынан екі есе үлкен болатын теңбүйірлі трапецияның параллель проекциясын салыңдар.

*Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы.* Егер түзу жазықтықтағы түзулердің кез келгеніне перпендикуляр болса, онда түзу осы *жазықтыққа перпендикуляр* деп аталады.

*Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі.* Егер түзу жазықтықта жатқан өзара қиылысқан екі түзуге перпендикуляр болса, онда түзу жазықтықтың өзіне де перпендикуляр болады.

Жазықтыққа перпендикуляр түзудің бағытында орындалатын параллель проекциялау *ортогональ проекциялау* деп аталады.

*Үш перпендикуляр туралы теорема.* Жазықтықта көлбеудің табаны арқылы оның проекциясына перпендикуляр етіп жүргізілген түзу сол көлбеудің өзіне де перпендикуляр болады.

# I тарау. КӨПЖАҚТАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ БЕТТЕРІНІҢ АУДАНДАРЫ

Көпжақтар теориясы, оның ішінде, дөңес көпжақтар — геометрияның өте қызықты бөлімдерінің бірі.

*Л. А. Люстерник*
*(1899—1981),*
*орыс математигі*

## § 1. КӨПЖАҚ ТУРАЛЫ ТҮСІНІК

Біз күнделікті өмірде куб (1-сурет) пен тікбұрышты параллелепипедті (2-сурет) жиі кездестіреміз. Олар *көпжақтар* деп аталатын фигуралардың өкілдері болып саналады.

Сонымен көпжақ дегеніміз не?

Алдымен геометриялық дене ұғымын түсіндіріп алайық. Қайсыбір физикалық дене қамтып тұрған кеңістіктің бөлігі геометриялық денеге көрнекі мысал бола алады. Куб, тікбұрышты параллелепипед, тетраэдр — геометриялық денелердің мысалдары.

Әрбір дененің ішкі облысы және беті болады. Мысалы, кубтың беті оның жақтары болып табылатын алты квадраттан тұрады. Кубтың бетінде жатпайтын барлық нүктелері оның ішкі облысын құрайды.

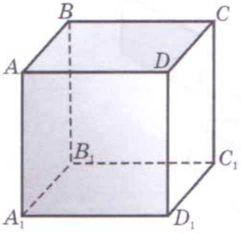
Геометриялық денелердің үлкен бір тобын көпжақтар құрайды. Көпжақ пішіндес заттар мен денелерді біз күнделікті өмірде жиі кездестіреміз: шырпының (сіріңкенің) қорабы, кітаптар, бөлме, көп қабатты (төбесі горизонталь болып келген) үйлер тікбұрышты параллелепипед; сүт құйылған пакеттер тетраэдрлер немесе параллелепипед тәріздес; ал қарындаштар, гайкалар призма тәріздес болып келеді.

Таза геометриялық тұрғыдан қарағанда, ***көпжақ*** *— көпбұрыштармен шектелген кеңістіктің бөлігі* (1—9-суреттер). Көпбұрыштар *көпжақтың жақтары* деп аталады.

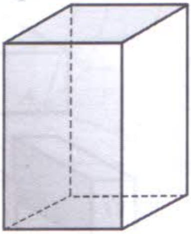
Көпжақтың жақтарының қабырғалары мен төбелері оның сәйкес *қырлары* және *төбелері* деп аталады. Жақтар көпжақтың бетін құрайды. Көпжақты оның төбелерін белгілеген әріптермен белгілеп жазамыз (1-сурет).

Көпжақтардың ең қарапайым тобын *дөңес көпжақтар* құрайды.

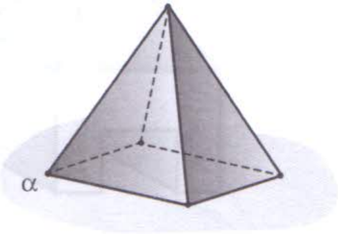
**1-анықтама.** *Егер көпжақ өзінің жағын қамтитын жазықтықтардың кез келгеніне қарағанда тұтастай бір жақ бетінде орналасса, онда ол* ***дөңес көпжақ*** *деп аталады* (1-, 2-, 3-, 4-, 7-, 8-суреттер).



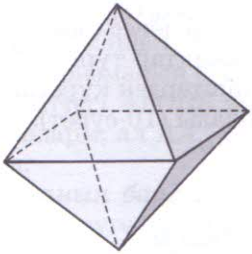
1-сурет



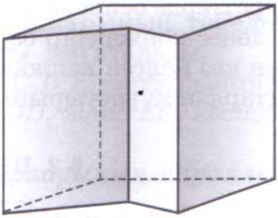
2-сурет



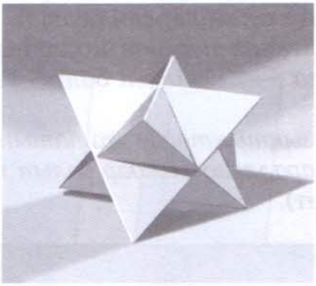
3-сурет



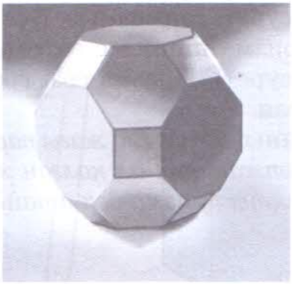
4-сурет



5-сурет

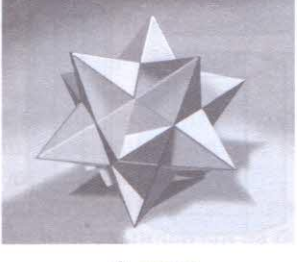


6-сурет

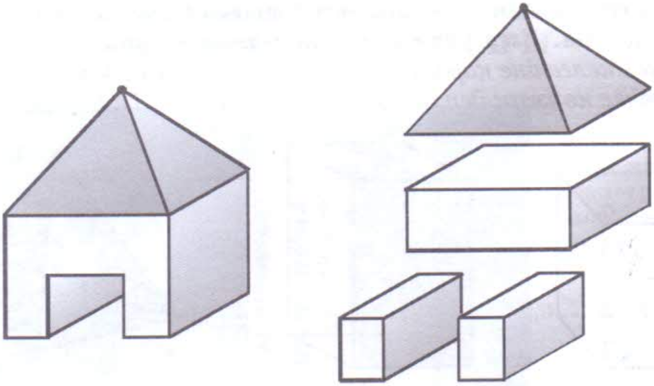


7-сурет

8-сурет



9-сурет



10-сурет

5-, 6-, 9-суреттерде бейнеленген көпжақтар дөңес емес.

Сонымен, дөңес көпжақтар барлық көпжақтар түрінің бір бөлігі ғана. Дегенмен кез келген көпжақты кірпіштерден құрағандай етіп дөңес көпжақтардан құрастырып алуға болады (10-сурет).

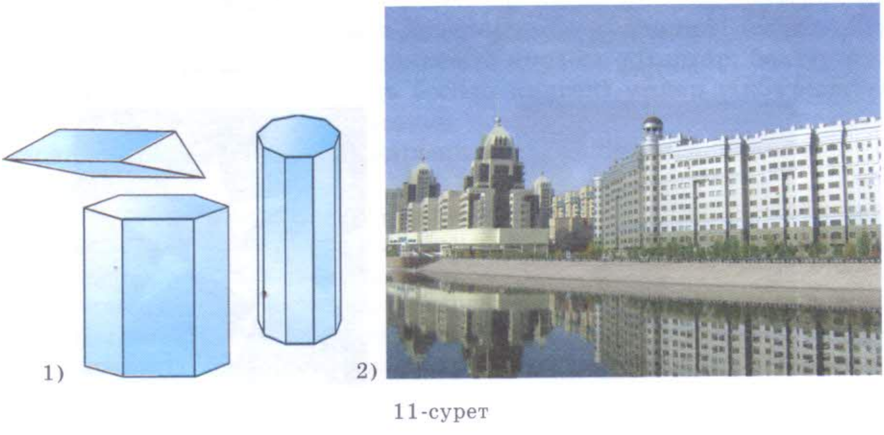
## § 2. ПРИЗМА

### 2.1. Призманың анықтамасы

Бұл параграфта біз көпжақтың дербес түрлерінің бірі *призмамен* (11.1-сурет) танысамыз. Бұл фигура ерте ғасырлардан белгілі.

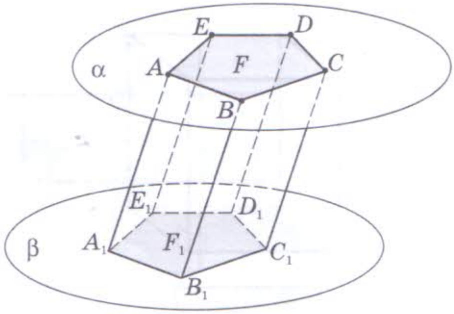
Призма пішіндес заттар үйлер салғанда кеңінен қолданылады (11.2-сурет). Призма сөзі гректің *prisma* — "кесілген бөлік" сөзінен алынған.

**2-анықтама.** *Екі жағы параллель жазықтықтарда жататын өзара тең көпжақтар, ал қалған жақтары параллелограмдар болып келген көпжақты* ***призма*** *деп атайды* (12-сурет).



1) 2)

11-сурет



12-сурет

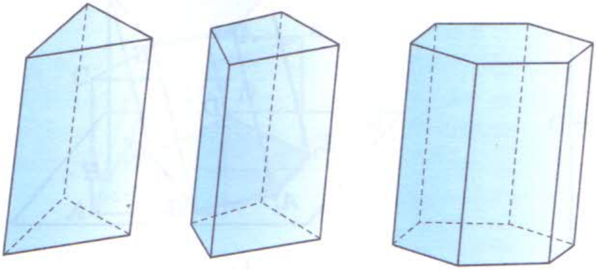
Аталған параллелограмдар *призманың бүйір жақтары* деп аталады.

Параллель жазықтықтарда жататын $F$ және $F_1$ көпбұрыштары призманың *табандары*, ал қалған жақтары *бүйір жақтары* деп аталады. Жоғарғы $F$ және төменгі $F_1$ табандарының төбелерін қосатын кесінділер призманың *бүйір қырлары* деп аталады.

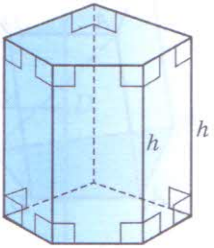
12-суреттегі $ABCDE$ және $A_1B_1C_1D_1E_1$ көпбұрыштары — призманың табандары, ал $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, $DD_1$ және $EE_1$ кесінділері — бүйір қырлары.

***Призманың барлық бүйір қырларының параллель және тең екенін*** дәлелдеуге болады (12-сурет) .

Табанының қабырғалар санына қарай призма үшбұрышты, төртбұрышты, ... , $n$ бұрышты болып бөлінеді (13-сурет).



13-сурет

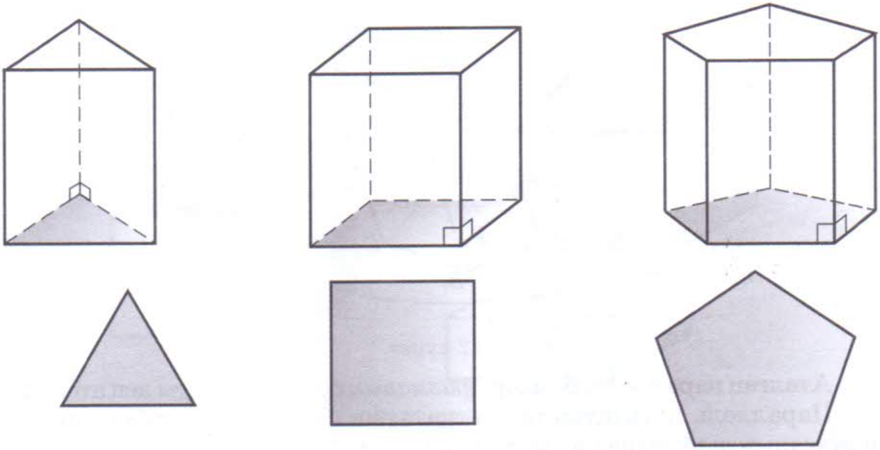


14-сурет

Егер призманың барлық бүйір жақтары да тіктөртбұрыш болып келсе, ол *тік призма* деп аталады (14-сурет). Тік призманың табанында дұрыс көпбұрыш жатса, онда призма *дұрыс призма* деп аталады (15-сурет).

*Призманың диагоналі* — оның ішімен өтетін және призманың екі табанының (бір бүйір жағында жатпайтын) төбелерін қосатын кесінді. 16-суреттегі $AC_1$ кесіндісі — призманың диагоналі.

Табандарының арасында оларға перпендикуляр орналасқан кесінді ***призманың биіктігі*** деп аталады (осы кесіндінің ұзындығын да *биіктігі* деп атай береміз). 17-суреттегі $CH$ кесіндісі призманың биіктігі.

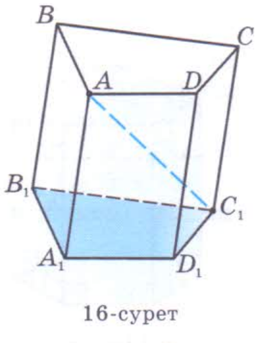


15-сурет

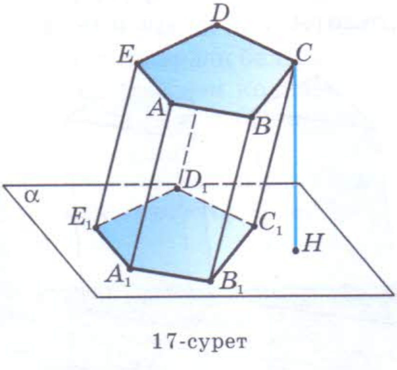
***Тік призманың биіктігі оның бүйір қырына тең*** (14-сурет).

**Осы тұжырымды өз беттеріңмен дәлелдеңдер.**

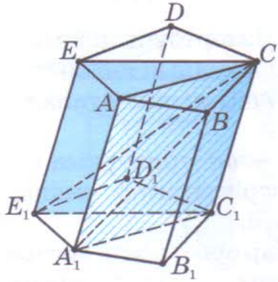
Призманың бір жағында жатпайтын екі бүйір қыры арқылы өтетін жазықтықпен қимасы оның *диагональдық қимасы* деп аталады.



16-сурет



17-сурет



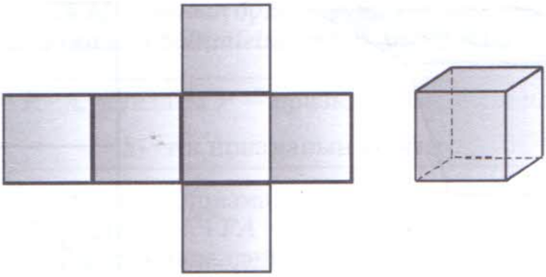
18-сурет

Мысалы, $ACC_1A_1$ және $ECC_1E_1$ — призманың диагональдық қималары (18-сурет).

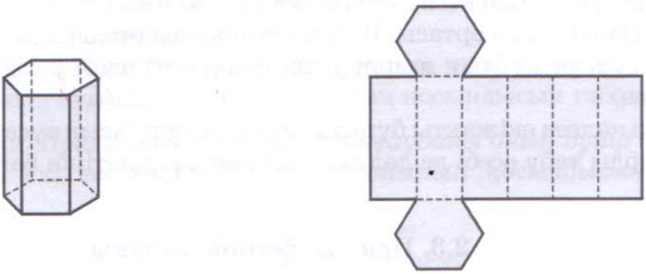
Кез келген призманың диагональдық қимасы — параллелограмм, ал тік призманың диагональдық қимасы — тіктөртбұрыш.

### 2.2. Призманың жазбасы

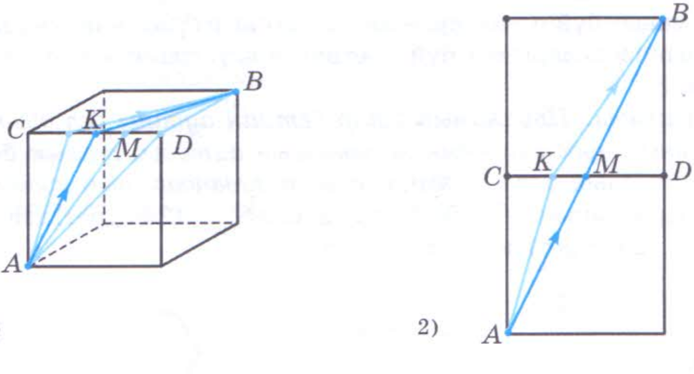
Призманың бетін жеке көпбұрыштарға бөлінбейтін етіп оның қырлары бойымен кесіп, жазықтыққа "жазып" жіберуге болады.



19-сурет



20-сурет

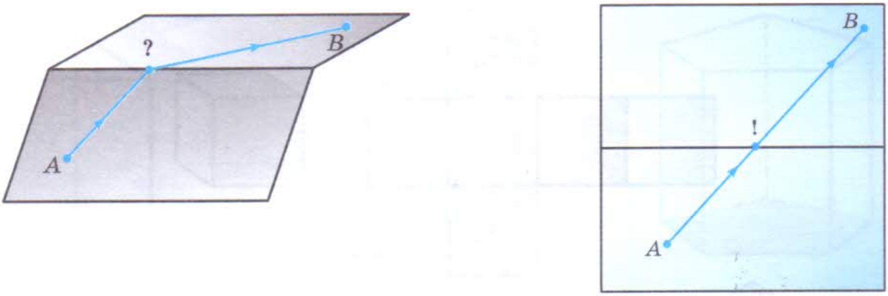


1) 2)

21-сурет

Алынған жазық фигураны призманың *жазбасы* деп атайды. 19-суретте кубтың жазбасы, ал 20-суретте дұрыс алты бұрышты призманың жазбасы бейнеленген.

Жазбалар бір нүктеден екінші нүктеге дейінгі (фигураның бетімен жүргендегі) ең қысқа жолды табуға арналған есептерді шешуге көмектеседі. Мысалы, кубтың *A* төбесінен оған қарама-қарсы орналасқан *B* төбесіне дейінгі *AKB* (21.1-сурет) жолдарының ішінен ең қысқа жолды табу үшін кубтың іргелес екі жағын жазып жіберіп,



22-сурет

$A$ мен $B$ нүктелерін кесіндімен қоссақ жеткілікті (21.2-сурет). Ең қысқа жол $CD$ қырының ортасы $M$ нүктесі арқылы өтеді ($A$ мен $B$ төбелерін бөліп тұрған кубтың қырларына сәйкес мұндай жолдардың саны 6-ға тең).

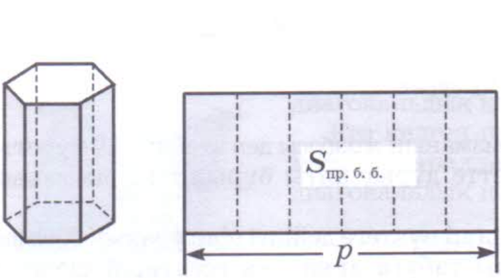
Кез келген екіжақты бұрыштың қырынан "асып түсетін" ең қысқа жолдарды табу есебі де дәл осы әдіспен шешілетінін байқаймыз (22-сурет).

## 2.3. Призма бетінің ауданы

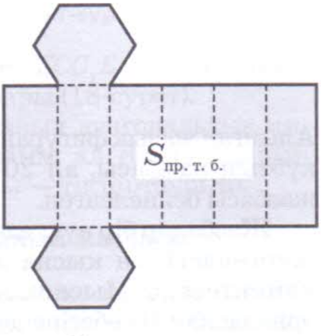
Бізге көпжақтың беті саны шектеулі көпбұрыштардан (жақтардан) тұратыны белгілі.

Призманың бүйір жақтарының бірігуі оның *бүйір беті* деп аталады. Призманың табандары мен бүйір бетінің бірігуі *призманың толық беті* деп аталады.

**3-анықтама.** ***Призманың бүйір бетінің ауданы*** *деп оның бүйір жақтарының аудандарының қосындысын айтады;* ***толық бетінің ауданы*** *деп оның барлық жақтарының аудандарының қосындысын айтады.* Призманың бүйір бетінің ауданын $S_{\text{пр. б. б}}$ (23-сурет) деп, толық бетін $S_{\text{пр. т.б}}$ (24-сурет) деп белгілейміз.



23-сурет



24-сурет

**1-теорема.** ***Тік призманың бүйір бетінің ауданы оның табанының периметрін призманың биіктігіне көбейткенге тең, яғни***

> $S_{\text{пр. б. б}} = P \cdot h$, мұндағы $P$ — призма табанының периметрі,
>
> $h$—тік призманың биіктігі.

*Дәлелдеу.* Берілген тік призманың биіктігі $h$, ал табанының периметрі $AB + BC + CD + \ldots + FA = P$ болсын. Призманың бүйір беті $S_{\text{пр.б.б.}} = P \cdot h$ болатынын дәлелдейік.

Тік призманың әрбір бүйір жағы — тіктөртбұрыш. Оның табаны призма табанының сәйкес қабырғасына, ал биіктігі призма биіктігіне тең.

Сондықтан $S_{\text{пр.б. б.}} = AB \cdot h + BC \cdot h + CD \cdot h + \ldots + FA \cdot h = (AB + BC + CD + \ldots + FA) \cdot h = P \cdot h.$

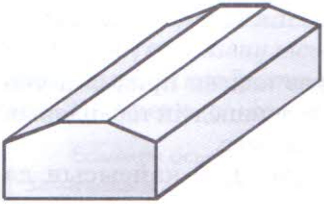
Көлбеу призманың бүйір бетінің ауданын табу үшін оның әрбір бүйір жағының ауданын есептеп, олардың қосындысын табамыз.

**2-теорема.** ***Призманың толық бетінің ауданы оның бүйір бетінің ауданы мен екі еселенген табан ауданының қосындысына тең:***

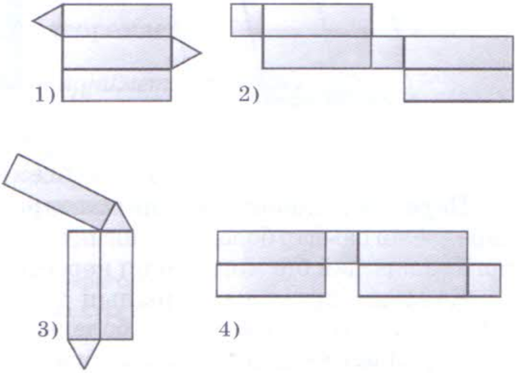
$$S_{\text{пр.т.б}} = S_{\text{пр.б.б}} + 2S_{\text{таб}}.$$

**23-, 24-суреттерді пайдаланып бұл теоремаларды өз беттеріңмен дәлелдеп көріңдер.**

1. Призма пішіндес денелерге мысалдар келтіріңдер.
2. 25-суретте бейнеленген іргетас призма пішіндес деп айтуға бола ма?
3. Тік призманың бүйір жақтары тіктөртбұрыштар болатынын дәлелдеңдер.
4. Фигуралардың (26-сурет) қайсысы а) төртбұрышты призманың; ә) үшбұрышты призманың жазбалары болады?
5. Дұрыс төртбұрышты призманың бір бүйір жағының ауданы 6 дм$^2$. Оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.
6. Табанының қабырғасы 5 см, ал бүйір жағының диагоналі 13 см-ге тең дұрыс төртбұрышты призманың биіктігін табыңдар.



25-сурет



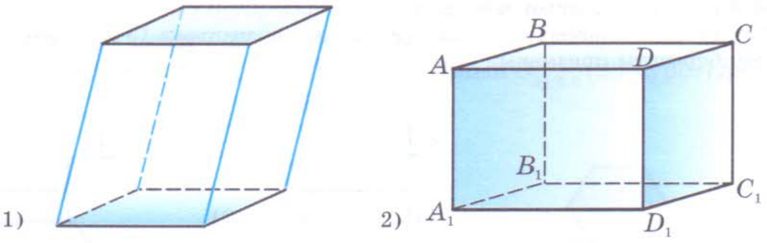
26-сурет

7. Үшбұрышты тік призманың бүйір қыры 4 см, ал табанының қабырғалары 3 см, 5 см және 6 см. Призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.
8. Үшбұрышты көлбеу призманың бүйір қыры 8 см, ал бүйір қырларының арақашықтықтары 3 см, 4 см, 5 см. Призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.
9. Үшбұрышты тік призманың барлық қырлары тең. Оның бүйір бетінің ауданы 48 см$^2$. Призманың толық бетінің ауданын табыңдар.
10. Дұрыс алтыбұрышты призманың бүйір бетінің ауданы 72 дм$^2$, ал бүйір жағының диагоналі 5 см. Призманың биіктігін және табанының қабырғасын табыңдар.
11. Дұрыс төртбұрышты призманың толық бетінің ауданы 80 дм$^2$, бүйір бетінің ауданы 64 дм$^2$. Призманың биіктігін табыңдар.
12. Үшбұрышты көлбеу призманың екі бүйір жағы өзара перпендикуляр. Олардың ортақ қыры 4,8 м және қалған екі бүйір қырынан 1,2 м, 3,5 м қашықтықта орналасқан. Призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.
13. Көлбеу призманың бүйір қыры оның табан жазықтығымен 30° бұрыш жасайды. Призманың бүйір қыры 12 см. Оның биіктігін табыңдар.
14. Кубтың қарама-қарсы екі қыры арқылы жүргізілген қимасының ауданы $64\sqrt{2}$ см$^2$-ге тең. Кубтың қырын және диагоналін табыңдар.
15. Тік призманың табаны — тікбұрышты үшбұрыш. Гипотенузаның ортасы арқылы оған перпендикуляр қима жүргізілген. Егер табанының катеттері 20 см және 21 см, ал призманың бүйір қыры 42 см болса, қиманың ауданы неге тең?

## § 3. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДТЕР

### 3.1. Параллелепипедтің анықтамасы

**4-анықтама.** *Табандары параллелограмдар болатын призманы **параллелепипед** деп атайды* (27-сурет).

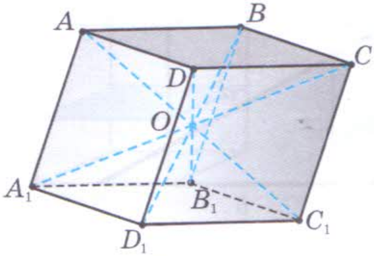


27-сурет

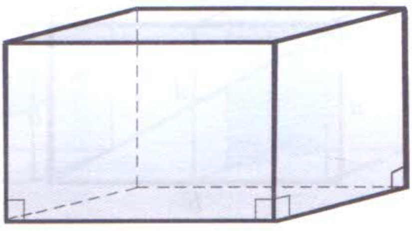
Параллелепипедтің бүйір жақтары да кез келген призмаға тән параллелограмдар болады. Сондықтан параллелепипедтің табандарын призмадағыдай бір мәнді бөліп көрсету мүмкін емес.

Қарама-қарсы жақтарының үш жұбының қай-қайсысын да табандары ретінде ала беруге болады.

Параллелепипедте төрт диагональ жүргізуге болады. 28-суретте $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің диагональдары — $AC_1$, $BD_1$, $CA_1$, $DB_1$.



28-сурет

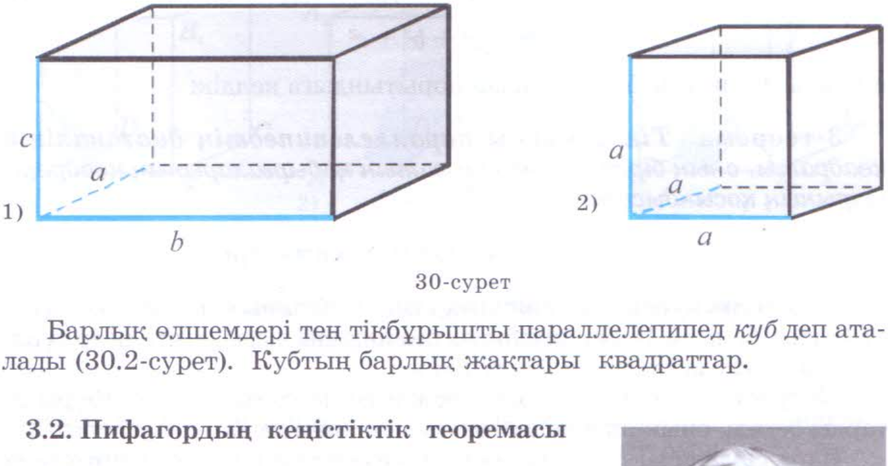


29-сурет

Параллелепипедтің төрт диагоналінің бір нүктеде, яғни олардың әрқайсысының ортасы болатын нүктеде қиылысатынын дәлелдеуге болады (28-сурет).

**5-анықтама**. *Барлық жақтары тіктөртбұрыш болатын параллелепипедті* ***тікбұрышты параллелепипед*** *деп атайды* (29-сурет).

Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын үш қырының ұзындығы оның *өлшемдері* деп аталады. 30.1-суретте өлшемдері *a*, *b*, *c* болатын тікбұрышты параллелепипед бейнеленген.



30-сурет

Барлық өлшемдері тең тікбұрышты параллелепипед *куб* деп аталады (30.2-сурет). Кубтың барлық жақтары квадраттар.

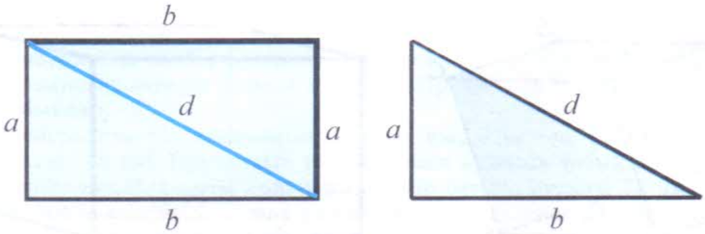
### 3.2. Пифагордың кеңістіктік теоремасы

*Пифагор теоремасы сендерге планиметрия курсынан таныс.*

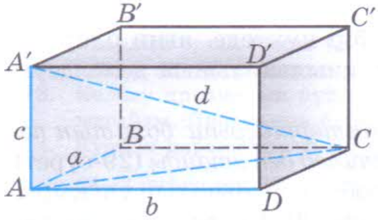
***Пифагор теоремасы. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасының квадраты оның катеттерінің квадраттарының қосындысына тең*** (31-сурет): $a^2+b^2=d^2$.

> Есімімен осы теорема аталатын Пифагор біздің заманымызға дейінгі VI ғасырда өмір сүрген (шамамен б.з.д. 570—500 жж.). Ол кезде гректерде енді ғана теориялық ғылым болып қалыптаса бастаған математикаға Пифагор зор үлес қосты.

Пифагор



31-сурет



32-сурет

Пифагор теоремасын кеңістік жағдайына жалпылауға болады. Ол үшін тікбұрышты үшбұрыш тікбұрышты параллелепипедпен алмастырылады. *ADC тікбұрышты үшбұрышынан* (32-сурет) Пифагор теоремасы бойынша $AC^2 = DC^2 + AD^2 = a^2 + b^2$ аламыз. Ал тікбұрышты $ACA'$ үшбұрышынан да Пифагор теоремасы бойынша $A'C^2 = AC^2 + AA'^2 = a^2 + b^2 + c^2$ немесе

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

шығады. Сонымен, біз мынандай қорытындыға келдік:

**3-теорема.** ***Тікбұрышты параллелепипедтің диагоналінің квадраты, оның бір төбесінен шығатын қабырғаларының квадраттарының қосындысына тең*** (32-сурет).

### 3.3. Параллелепипедтің қималары

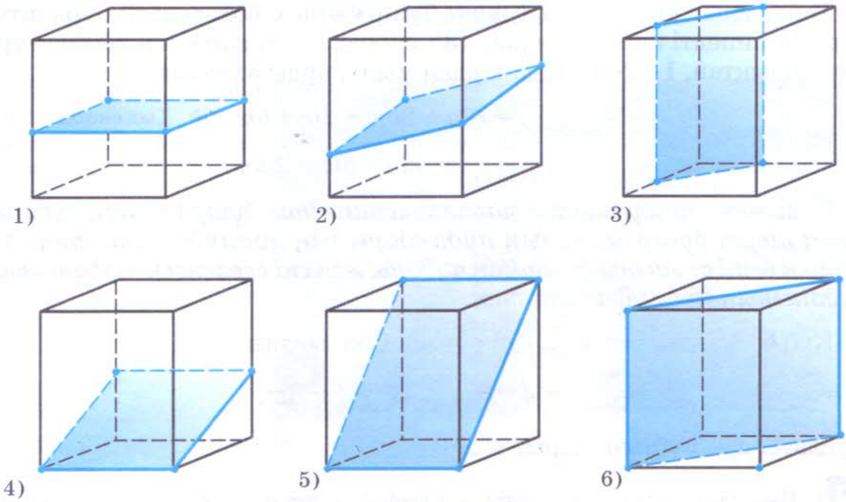
Геометрия курсында көпжақтардың қималары бізге жиі кездесіп отыратын болады. Параллелепипед пен қиюшы жазықтықтың әр түрлі орналасу жағдайларын қарастырайық.

33-суретте кескінделген барлық жағдайлардағы қима төртбұрыштарды береді, оның ішінде диагональдық қима да бар (33.6-сурет).

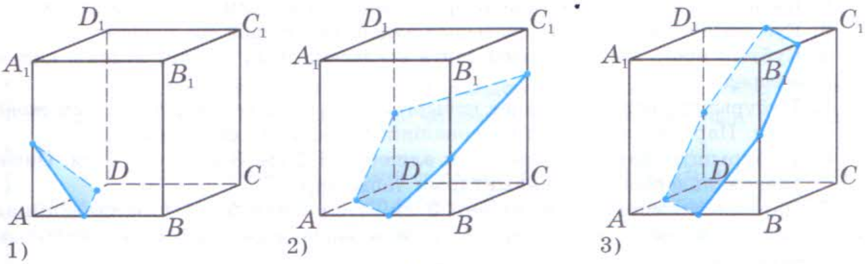
Параллелепипедтің жазықтықпен қимасында әрқашан төртбұрыш шыға бере ме?

34-суреттен $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің қимасы үшбұрыш (34.1-сурет), бесбұрыш (34.2-сурет), алтыбұрыш (34.3-сурет) болуы мүмкін екенін көреміз. Сонымен, параллелепипедтің жазықтықпен қимасы үшбұрыш, төртбұрыш, бесбұрыш, алтыбұрыш болуы мүмкін. Қимада пайда болған көпбұрыштың төбелері қиюшы жазықтықтың көпжақтың қырларымен, ал қабырғалары көпжақтың жақтарымен қиылысқанда пайда болады.

Қимада әр түрлі көпбұрыштар алынатын жағдайларға мысалдар келтіріңдер.



33-сурет

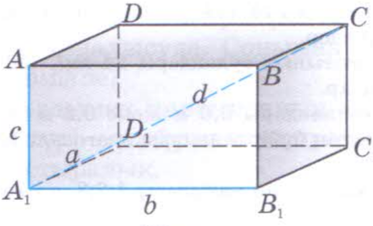


34-сурет

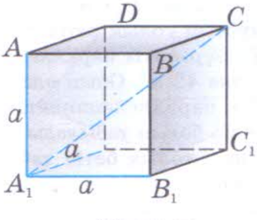
## 3.4. Кубтың және тікбұрышты параллелепипед беттерінің аудандары

Біз куб пен тікбұрышты параллелепипедтің қасиеттері туралы біраз мағлұматпен таныспыз. Олардың жақтары — біз аудандарын жеңіл есептей білетін квадраттар немесе тіктөртбұрыштар.

Олардың *бүйір беті* мен *толық бетін* ажырата білу керек. Бүйір беті тек бүйір жақтарынан ғана тұрады, оған табандары кірмейді.



35-сурет



36-сурет

Табанының қырлары $a$, $b$ және бүйір қыры $c$ болатын тікбұрышты параллелепипедті қарастырайық (35-сурет). Ол призманың дербес түрі болғандықтан, 1-, 2-теоремалардан мыналарды аламыз:

$$S_{\text{тік пар-д б.б.}} = (2a + 2b)c = 2(a + b)c,$$

$$S_{\text{тік пар-д т.б.}} = 2(a + b)c + 2ab.$$

Сонымен, ***тікбұрышты параллелепипедтің бүйір бетінің ауданы оның төрт бүйір жағының аудандарының қосындысына тең, ал толық беті оның бүйір бетінің ауданы мен екі еселенген табанының ауданының қосындысына тең.***

Куб болғанда, $b = c = a$ (36-сурет). Сондықтан

$$S_{\text{куб.б.б.}} = 4a^2, \qquad S_{\text{куб.т.б.}} = 6a^2,$$

мұндағы $a$ — кубтың қыры.

1. Параллелепипедтің үш жағы — тіктөртбұрыштар. Бұдан берілген параллелепипед тік параллелепипед деген қорытынды шығаруға бола ма?
2. Параллелепипедтің пішіндері әр түрлі болатын қималарын салыңдар.
3. Куб бетінің ауданы оның жағының ауданынан қанша есе үлкен?
4. Кубтың әрбір қырын бірдей санға еселесек, оның бетінің ауданы қалай өзгереді?
5. Тікбұрышты параллелепипед қабырғаларының өлшемдері 4 дм, 2 дм және 4 дм. Параллелепипедтің диагоналінің ұзындығын есептеңдер.
6. Тікбұрышты параллелепипедтің өлшемдері 2 см, 3 см және 6 см. Оның диагональдарының ұзындықтарын табыңдар.
7. Параллелепипедтің өлшемдері 3 см, 4 см және 5см. Параллелепипед диагоналінің оның ең кіші жағымен жасайтын көлбеулік бұрышын табыңдар.
8. Куб диагоналінің ұзындығы $4\sqrt{8}$ см. Куб қырының ұзындығын табыңдар.
9. Егер кубтың қыры а) 4 см; ә) 10 см; б) 1м болса, оның толық бетінің ауданы неге тең?
10. Егер кубтың қыры а) 6 см, ә) 10 см; б) 12 см болса, оның бүйір бетінің және толық бетінің аудандары неге тең?
11. Табанының қабырғалары 2 см және 4 см-ге, биіктігі 2 см-ге тең тік бұрышты параллелепипед берілген. Параллелепипедтің бүйір бетінің және толық бетінің аудандарын табыңдар.
12. Ағаш тақтайдың ұзындығы 6 см, ені 24 см, қалыңдығы 3 см. Оның толық бетінің ауданын есептеңдер.
13. Егер кубтың толық беті а) 150 см$^2$; ә) 600 см$^2$; б) 216 см$^2$ болса, оның қырының ұзындығын есептеңдер.
14. Егер кубтың бүйір бетінің ауданы а) 64 см$^2$; ә) 324 см$^2$; б) 576 см$^2$ болса, кубтың толық бетінің ауданын есептеңдер.
15. Тікбұрышты параллелепипедтің үш жағының аудандары 24 дм$^2$, 28 дм$^2$ және 42 м$^2$. Оның өлшемдерін табыңдар.
16. Тік параллелепипедтің табаны диагональдары 0,6 м және 0,8 м-ге тең ромб болып табылады. Параллелепипедтің бүйір жағының диагоналі 1,3 м. Оның толық бетін табыңдар.
17. Тікбұрышты параллелепипедтің үш өлшемінің қатынасы 1:2:3, ал толық беті 198 дм$^2$. Оның өлшемдерін табыңдар.

# § 4. ПИРАМИДА

Дүниеде бәрі уақыттан қорқады, бірақ уақыт пирамидалардан қорқады.

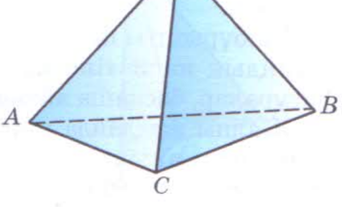
*Араб мақалы*

Мысыр фараондары қабірлерінің ішіндегі ең ірілері Хеопс, Хефрен және Гиздегі Микерин пирамидалары әлемнің жеті ғаламатының бірі болып есептеледі.

Үш пирамиданың ең үлкені —Хеопс пирамидасы (б.з.д. XXVII ғ.). Алғашқыда оның биіктігі 147 м, ал табан қабырғасының ұзындығы 232 м болған. Оның құрылысына орташа салмағы 2,5 тонналық 2 млн 300 мың үлкен сандық тастар қажет болған. Сандық тастар орасан зор дәлдікпен қаланғандықтан ғана қозғалмай сақталған, әйтпесе оларды қалағанда лай пайдаланылмаған. Ертеде тақтайдай тегістелген ақ тастармен жабылып, төбелері жез қаңылтырлармен қапталған пирамидалар күнге шағылысып тұрған.

## 4.1. Пирамиданың анықтамасы және жалпы қасиеттері

Көпжақтардың ерекше түрінің бірі — пирамида. Пирамида тақырыбын қозғағанда Мысыр пирамидаларын атамай кету мүмкін емес. Олар тек математиктерді ғана емес, сонымен қатар физиктерді, тарихшыларды т.б. қызықтырып келеді. Оларды зерттеумен ғалымдар жүздеген ғасырлар бойы айналысуда. Сонымен пирамида дегеніміз не?



37-сурет

Алдымен пирамиданың ең қарапайым түрі — *үшбұрышты* пирамидаларды қарастыралық.

37-суретте *O*, *A*, *B* және *C* төбелерімен берілген *OABC* үшбұрышты пирамидасы бейнеленген. *O* нүктесі пирамиданың *төбесі* деп аталады. Пирамиданың *OAB*, *OBC*, *OCA*, *ABC* жақтары — үшбұрыштар.

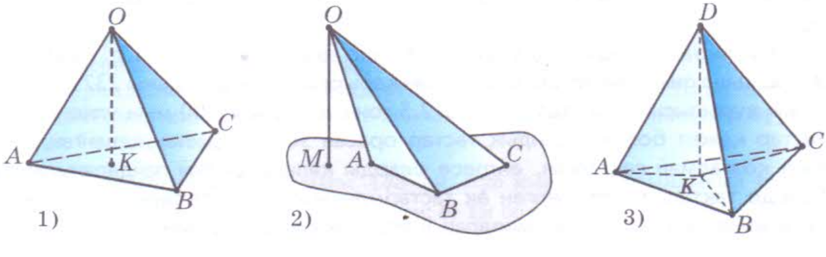
*ABC* жағын *пирамиданың табаны* деп атайды. *OA*, *OB*, *OC*, *AB*, *BC*, *CA* кесінділері — пирамиданың қырлары.

Пирамиданың табанында жатқан үшбұрыштың түріне қарай пирамида әр түрлі көрінуі мүмкін. Мысалы, 38.1-суретте ***тікбұрышты пирамида***, ал 38.2-суретте ***үшбұрышты көлбеу пирамида*** бейнеленген.

Бұл атаулар пирамиданың биіктігінің, дәлірек айтқанда, биіктігінің табаны қалай, қайда орналасқанымен байланысты. *Пирамиданың биіктігі* дегеніміз — оның төбесінен табан жазықтығына түсірілген перпендикуляр немесе осы перпендикулярдың ұзындығы.

Үшбұрышты пирамиданың биіктігін нүктеден жазықтыққа түсірілген перпендикуляр түсінігі арқылы анықтауға болады. 38.1-суреттен тік пирамида биіктігінің табаны пирамида табанының ішкі нүктесі болатынын көреміз. Көлбеу пирамида биіктігінің табаны пирамида табанынан тысқары жатыр (38.2-сурет).

38.3-суретте дұрыс үшбұрышты пирамида бейнеленген. Ондай пирамиданың табанында дұрыс үшбұрыш жатады, ал оның барлық бүйір жақтары өзара тең болатын теңбүйірлі үшбұрыштар болып табылады. Бұл жағдайда биіктіктің табаны пирамида табанының центріне дәл түседі (табанының центрін табанының төбелерінен бірдей қашықтықта орналасқан нүкте ретінде анықтауға болады).



38-сурет

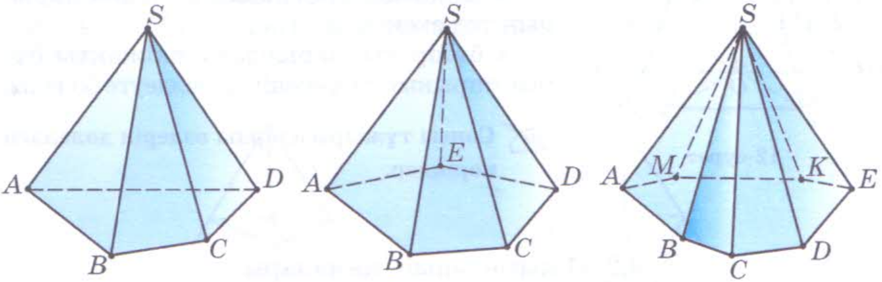
Геометрияда барлық жақтары теңқабырғалы үшбұрыштар болатын пирамиданың дербес түрі жиі қарастырылады. Мұндай пирамидаларды *тетраэдрлер* деп атайды. Ол “төртжақты” деген мағына білдіреді.

Үшбұрышты пирамидалар (жазықтықтағы үшбұрыштар тәрізді) қатаңдық қасиетіне ие. Пирамидалар — “қатаң” геометриялық фигуралар, басқаша айтқанда, олардың пішінін өзгертуге болмайды.

Жалпы жағдайда пирамиданың түрін оның табанында жататын көпбұрыш анықтайды. Сондықтан пирамидалар төртбұрышты, бесбұрышты, жетібұрышты, тіпті *n* бұрышты да болуы мүмкін. Егер оның табанында *n* бұрыш жатса, онда пирамида *n бұрышты* деп аталады.

**6-анықтама.** ***Пирамида*** *деп бір жағы кез келген көпбұрыш, ал қалған жақтары төбелері ортақ үшбұрыштардан тұратын көпжақты атайды.*

39-суретте табандары көпбұрыштар болатын әр түрлі пирамидалар бейнеленген. Пирамидаларды *дөңес* және *дөңес емес* деп бөлеміз.



1) төртбұрышты пирамида (*ABCD* — төртбұрыш)

2) бесбұрышты пирамида (*ABCDE* — бесбұрыш)

3) жетібұрышты пирамида (*ABCDEKM*—жетібұрыш)

39-сурет

Үшбұрышты пирамидалар (40-сурет) әрқашан дөңес көпжақтарға жатады. Ал басқа пирамидалардың дөңес емес болуы да мүмкін. 41-суретте дөңес емес $SABCD$ төртбұрышты пирамида бейнеленген. Оны кез келген жағымен жазықтыққа жатқызуға келмейді.

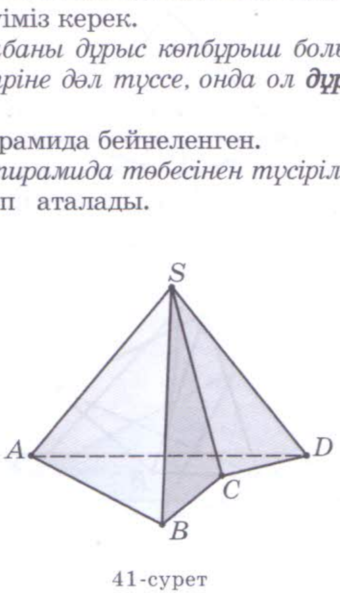
Егер біз "пирамида" деп жазсақ (немесе айтсақ), онда әңгіме дөңес пирамида туралы болып тұр деп түсінуіміз керек.

**7-анықтама.** *Егер пирамиданың табаны дұрыс көпбұрыш болып, төбесінің проекциясы табанының центріне дәл түссе, онда ол* ***дұрыс пирамида*** *деп аталады* (42-сурет).

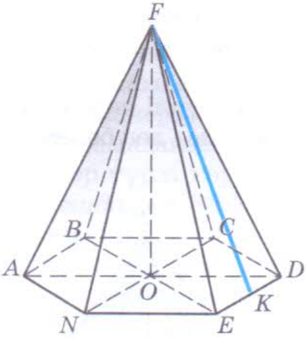
42-суретте дұрыс алтыбұрышты пирамида бейнеленген.

*Дұрыс пирамиданың бүйір жағының пирамида төбесінен түсірілген биіктігі* ***пирамиданың апофемасы*** деп аталады.

40-сурет



41-сурет



42-сурет

Мысалы, 42-суретте *FK* — пирамиданың апофемасы.

Дұрыс пирамиданың

- бүйір қырларының тең екенін;
- бүйір жақтарының тең екенін;
- апофемаларының тең екенін;
- табанындағы екіжақты бұрыштарының тең екенін;
- бүйір қырларындағы екіжақты бұрыштарының тең екенін дәлелдеуге болады.

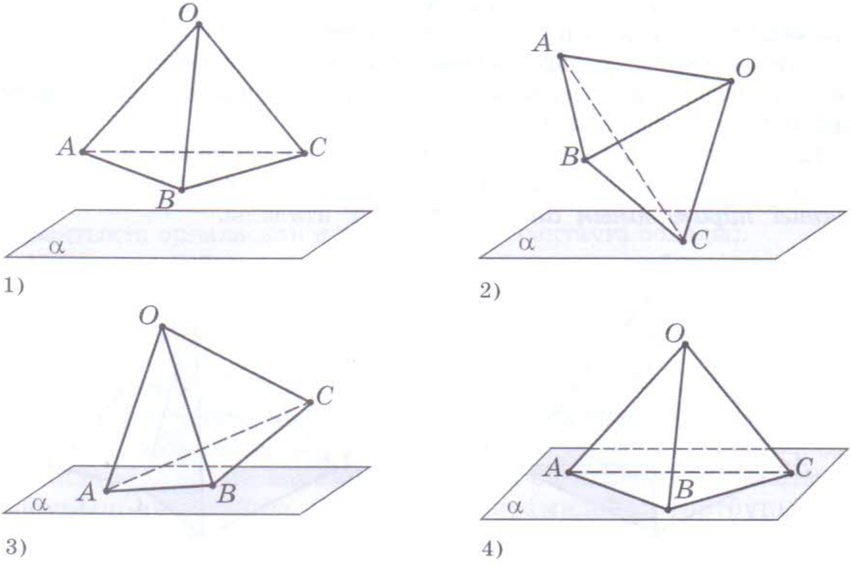
**Соңғы тұжырымдарды өздерің дәлелдеп көріңдер.**

## 4.2. Пирамиданың қималары

Үшбұрышты пирамиданың жазықтықпен қимасының әр түрлі жағдайларын толығырақ қарастырайық.

43-суретте жазықтықтың пирамида қырларын қимайтын кезіндегі пирамида мен жазықтықтың орналасуының әр түрлі жағдайлары бейнеленген:

- пирамида мен жазықтықтың ортақ нүктелері жоқ (43.1-сурет);
- пирамида мен жазықтықтың тек бір ғана ортақ нүктесі бар, ол — пирамиданың *C* төбесі (43.2-сурет);



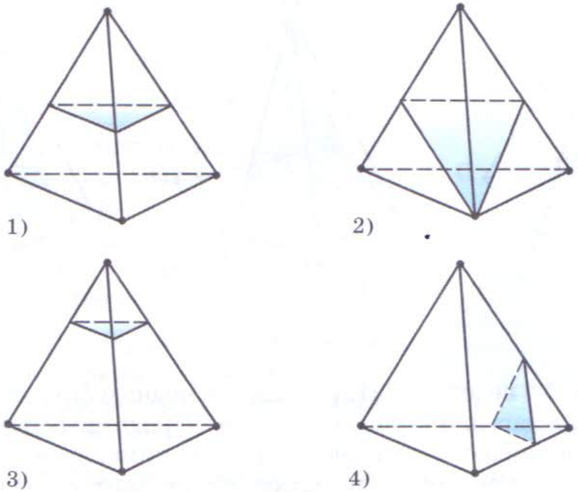
43-сурет

- пирамиданың $AB$ қыры жазықтықта жатады (43.3-сурет);
- пирамиданың $ABC$ жағы жазықтықта жатады (43.4-сурет).

Қиюшы жазықтық пирамиданың қырларын қиып өтсін.

44-суретте бейнеленген жағдайлардың бәрінде де қимада үшбұрыштар алынады. Олар пирамидадан әр түрлі көпжақтар, көбіне пирамидалар бөліп түсіреді.

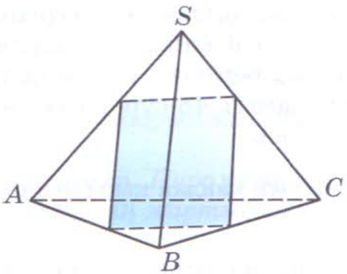
Егер қима пирамида табанына параллель өтіп оның қырларымен қиылысса (44.3-сурет), онда біз пирамидадан қиық пирамида бөліп аламыз.


1) 2) 3) 4)

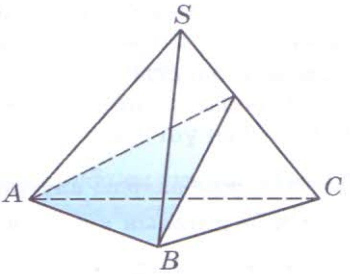
44-сурет

Мынадай сұрақ туындайды: "Пирамиданың жазықтықпен қимасында әр уақытта үшбұрыштар шыға бере ме? Үшбұрышты пирамиданың қимасы оның бірнеше төбелері арқылы өтуі мүмкін бе?"

45-суреттен біз $SABC$ үшбұрышты пирамидасының қимасы төртбұрыш болатынын көреміз.



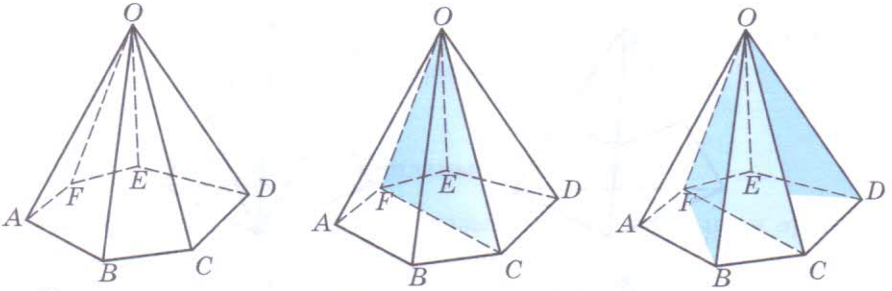
45-сурет



46-сурет

Пирамиданың, мысалы, екі төбесі арқылы өтетін қимасы да кездеседі (46-сурет).

Енді *үшбұрышты емес*, мысалы, *алтыбұрышты* пирамиданың қималарын қарастырайық (47.1-сурет). Табанының $FC$ диагоналін жүргізейік (47.2-сурет). Біз төртбұрышты $OABCF$ және $OCDEF$ екі пирамида аламыз. Тағы екі $FB$ және $FD$ диагоналін жүргізе аламыз (47.3-сурет). Нәтижесінде төртбұрышты пирамидалардың әрқайсысы екі үшбұрышты пирамидаға бөлінді. Сонымен, біз алтыбұрышты пирамиданы төрт үшбұрышты пирамидаға бөлдік.



1) 2) 3)

47-сурет

Сонымен, біз не істедік? Пирамида табанының бір төбесінен шығатын диагональдар жүргіздік (олар үшеу болып шықты) және әрбір диагоналі мен пирамиданың төбесі арқылы қима, яғни жазықтықтар жүргіздік. Шыққан қималар *пирамиданың диагональдық қималары* деп аталады.

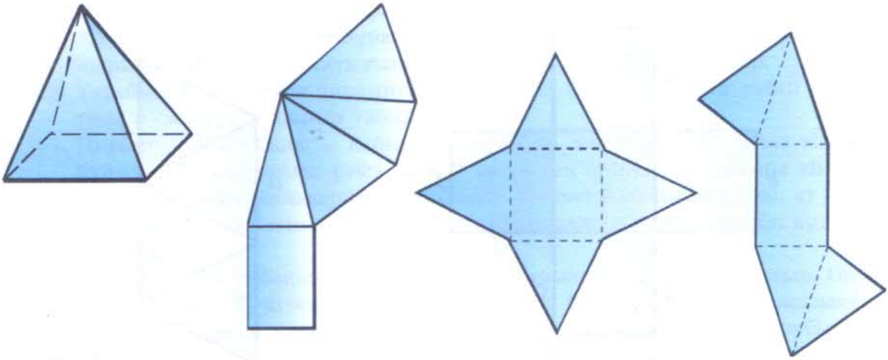
### 4.3. Пирамиданың жазбалары. Пирамида бетінің ауданы

§ 2-та біз көпжақтардың куб және призма тәріздес дербес түрлерінің жазбаларымен танысқанбыз.

Біз көпжақтардың әр түрлі бірнеше жазбасы болуы мүмкін екенін айтқанбыз. Жазбаның пішіні көпжақтың бетін қандай қырлары арқылы ажыратқанымызға байланысты болады. Созылмайтын жұмсақ материалдан (қағаз, картон және т.б.) жасалған төртбұрышты пирамиданың моделін алайық. Осы модельді қайсыбір қырлары бойымен ажыратып, жазықтыққа жазсақ, берілген пирамиданың жазбасы болатын бірнеше көпбұрышты аламыз. 48-суретте осындай пирамиданың үш түрлі жазбасы бейнеленген.

**Осы жазбаларды алу үшін пирамиданың қандай қырлары бойымен қиылғанын анықтаңдар.**

Дайын жазбадан көпжақтың моделін желімдеп дайындауға болады. 49-суретте пирамиданың моделін дайындауға болатын жазба

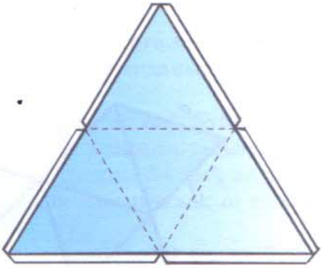

1) 2) 3) 4)

48-сурет

бейнеленген. Желімдеуге ыңғайлы болу үшін арнайы қосымша жолақтар қарастырылған.

Жазбаның желімдегенде сәйкес келетін қырлары көбіне бірдей әріптермен белгіленеді (50-сурет).

**50-суретте әр түрлі көпжақтардың жазбалары бейнеленген. Олардан сәйкес көпжақтардың беттерінің модельдерін жасаңдар.**


49-сурет

**8-анықтама.** ***Пирамиданың бүйір бетінің ауданы $S_{\text{пир.б.б}}$*** *деп оның барлық бүйір жақтарының аудандарының қосындысын айтады.* ***Толық бетінің ауданы*** *оның барлық жақтарының аудандарының қосындысына тең:*

$$S_{\text{пир.т.б}} = S_{\text{пир.б.б}} + S_{\text{таб}}, \text{ мұндағы } S_{\text{таб}} \text{ — табанының ауданы.}$$

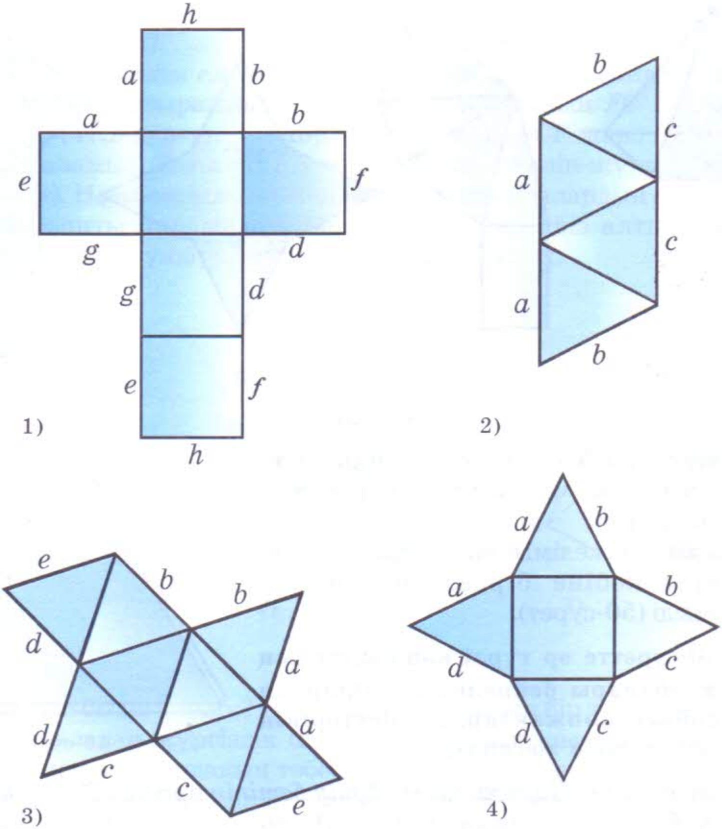
Бізге дұрыс $n$ бұрышты пирамида берілсін. Пирамиданың апофемасының ұзындығы $k$, табан қабырғасының ұзындығы $a$, табанының периметрі $P = a \cdot n$ болсын.

Сонда пирамиданың бүйір бетінің ауданы өзара тең $n$ жағының аудандарының қосындысынан тұратыны, яғни

$S_{\text{пир.б.б}} = \frac{k \cdot a}{2} \cdot n$ немесе $S_{\text{пир.б.б}} = \frac{P \cdot k}{2}$ болатыны түсінікті. Сонымен, мынадай тұжырым жасаймыз.

**4-теорема.** ***Пирамиданың бүйір бетінің ауданы оның табанының периметрінің жартысын пирамиданың апофемасына көбейткенге тең:***

$$S_{\text{пир.б.б}} = \frac{1}{2} \cdot Pk.$$



50-сурет

1. а) Төртбұрышты пирамиданың; ә) бесбұрышты пирамиданың; б) онбұрышты пирамиданың қанша төбесі, қыры және жақтары болады?
2. Көпжақтың ең аз қанша қыры болуы мүмкін? Ең аз жақтарының саны қанша?
3. Қандай пирамиданың кез келген жағын табаны деп алуға болады?
4. а) 4 қыры; ә) 6 қыры; б) 11 қыры; в) 30 қыры бар пирамида бола ма?
5. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың диагональдық қималары қандай фигуралар болады?
6. Төртбұрышты пирамиданың жазықтықпен қимасы қандай фигуралар болады? Бесбұрышты пирамиданың ше? Сәйкес суреттерді салыңдар.
7. Берілген кубтан төртбұрышты пирамида қиып түсіруге бола ма? Оны қалай істеуге болады? Сәйкес суретті салыңдар.
8. Пирамиданың табанында дұрыс көпбұрыш жатыр. Осы шарт дұрыс пирамида болу үшін жеткілікті ме?
9. Пирамиданың табаны — диагоналі 10 см-ге тең тіктөртбұрыш. Пирамиданың әрбір бүйір қыры 13 см. Пирамиданың биіктігін табыңдар.
10. Пирамиданың әрбір бүйір қыры 17 см-ге тең, ал табаны — қабырғалары 18 см және 24 см болатын тіктөртбұрыш. Пирамиданың биіктігін табыңдар.
11. Пирамиданың табаны — қабырғасы 6 см-ге тең теңқабырғалы үшбұрыш. Пирамиданың әрбір бүйір қыры табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Пирамиданың биіктігін табыңдар.

12. Мысыр жеріндегі Хеопс пирамидасы биіктігі 147 м, ал табанының ауданы 5,3 га-ға тең дұрыс төртбұрышты пирамида болып табылады. Оның бүйір қырының табан жазықтығына көлбеулік бұрышын табыңдар.

13. Төртбұрышты дұрыс пирамиданың биіктігі 7 см-ге тең, ал табан қабырғасы 8 см. Бүйір қырын табыңдар.

14. Пирамиданың табаны — қабырғалары 12 см және 10 см болатын тіктөртбұрыш. Пирамиданың ұзындығы 8 см-ге тең биіктігінің табаны тіктөртбұрыштың диагональдарының қиылысу нүктесі болып табылады. а) Пирамиданың бүйір бетінің ауданын; ә) пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар.

15. Пирамиданың табанында теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрыш жатыр. Оның гипотенузасы $c$-ға тең. Пирамиданың әрбір бүйір қыры табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар.

16. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың бүйір қыры $2d$, ал табанының қабырғасы $d$. Пирамида бетінің ауданын табыңдар.

17. Пирамиданың табаны — теңбүйірлі үшбұрыш. Үшбұрыштың биіктігі 12 дм, ал табаны 8 дм. Пирамиданың әрбір бүйір қыры 15 дм. Пирамиданың биіктігін табыңдар.

18. Пирамиданың табаны — тіктөртбұрыш. Оның қабырғалары 0,6 дм, 0,8 дм. Пирамиданың әрбір бүйір қыры 1,5 дм. Пирамиданың биіктігін табыңдар.

19. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының ауданы 36 $см^2$. Бүйір қыры 5 см. Пирамиданың апофемасын және бүйір бетінің ауданын табыңдар.

20. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың толық бетінің ауданы 84 $дм^2$, ал табанының ауданы 36 $дм^2$. Пирамиданың а) табанының қабырғасын; ә) апофемасын; б) бүйір қырын табыңдар.

21. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғасы 10 дм, ал бүйір қыры 13 дм. Оның биіктігінің ортасы арқылы табанына параллель қиюшы жазықтық жүргізілген. Қиманың ауданын табыңдар.

22. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың табанының қабырғасы 12 дм, биіктігі 10 дм. Пирамиданың бүйір қабырғасының ортасы арқылы табанына параллель қиюшы жазықтық жүргізілген. Қиманың ауданын табыңдар.

23. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың табанының қабырғасы 10 дм, ал бүйір қабырғасы табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

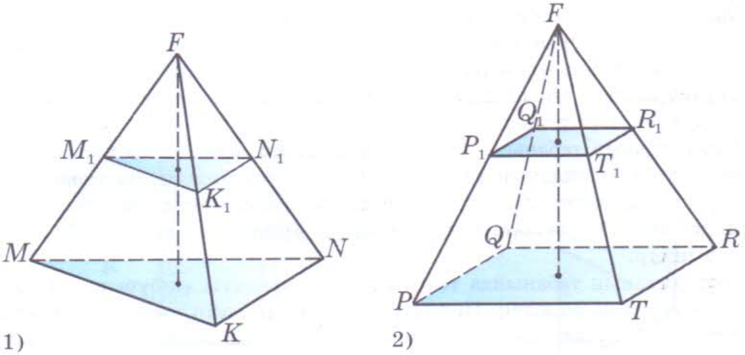
24. Пирамиданың биіктігі 12 м. Табанының ауданы 576 $м^2$. Егер параллель қиманың ауданы 64 $м^2$ болса, қима пирамида табанынан қандай қашықтықта өтеді?

25. Пирамиданың табаны — диагональдары 6 см және 8 см болатын ромб. Пирамиданың биіктігі ромб диагональдарының қиылысу нүктесі арқылы өтеді және 3 см-ге тең. Диагональдық қималардың аудандарын табыңдар.

26. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғасы 8 см, бүйір қыры табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Диагональдық қималардың аудандарын табыңдар.

## § 5. ҚИЫҚ ПИРАМИДА ЖӘНЕ ОНЫҢ БЕТІНІҢ АУДАНЫ

Қиюшы жазықтықтың пирамидадан әр түрлі көпжақтар қиып түсіретінін, оның көп жағдайда пирамида болуы мүмкін екенін біз атап өткенбіз (§4.2). Егер қима пирамида табанына параллель болса, онда біз қиық пирамида аламыз (51-сурет).



1) 2)

51-сурет

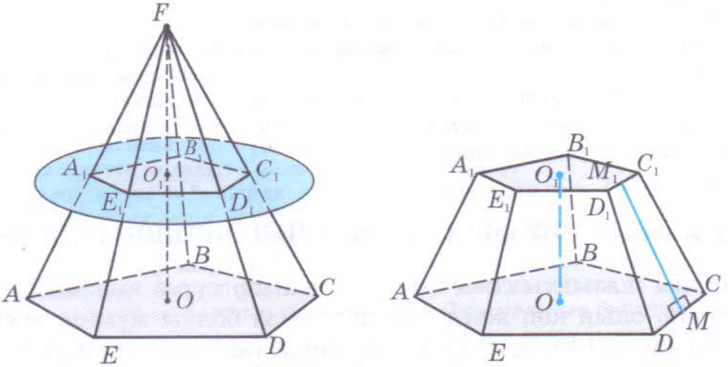
**9-анықтама.** *Пирамиданың табаны мен табан жазықтығына параллель қима жазықтығының арасындағы бөлігі* ***қиық пирамида*** *деп аталады* (52.1-сурет).

Мысалы, $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ көпжағы — бесбұрышты қиық пирамида (52.2-сурет). Қиық пирамиданың төменгі ($ABCDE$ көпбұрышы) және жоғарғы ($A_1B_1C_1D_1E_1$ көпбұрышы) екі табаны бар. Қиық пирамиданың бүйір жақтары — трапециялар, ал оның бүйір қырлары — осы трапециялардың бүйір қабырғалары.

Бір табанының кез келген нүктесінен екінші табан жазықтығына түсірілген перпендикуляр *қиық пирамиданың биіктігі* деп аталады. 52.2-суреттегі $O_1O$ кесіндісін қиық пирамиданың биіктігі, ал оның ұзындығын табандарының арақашықтығы деп атауға да болады.

Параллель жазықтықтардың қасиеттерін пайдаланып пирамиданың табанына параллель қиманың қасиетін қарастырайық.

$FABCDE$ пирамидасы берілсін (52.1-сурет). Егер оның табанына параллель қиюшы жазықтық жүргізсек, қимада $A_1B_1C_1D_1E_1$ көпбұрышын аламыз (ол қима бөліп түсірген кіші пирамиданың табаны болады). Сонда пайда болған $ABF$ және $A_1B_1F$, ... , $AEF$ және $A_1E_1F$ ұқсас үшбұрыштарының ұқсастық коэффициенті



52-сурет

$A_1B_1/AB = k$-ға тең. Сәйкес қабырғалары пропорционал болғандықтан, $A_1B_1C_1D_1E_1$ мен $ABCDE$ көпбұрыштары да ұқсас. Берілген пирамиданың биіктігі — $FO$, ал $FA_1B_1C_1D_1E_1$ пирамидасының (кіші) биіктігі $FO_1$ болса, онда $FO_1/FO = k$ ($A_1FO_1$, $AFO$ үшбұрыштарының ұқсастығынан) болады. Ұқсас үшбұрыштардың аудандарының қатынасы олардың сәйкес сызықтық өлшемдерінің квадраттарының қатынасына тең екені планиметрия курсынан белгілі. Сондықтан

$$S(A_1B_1C_1D_1E_1)/S(ABCDE) = k^2$$

немесе $$S(A_1B_1C_1D_1E_1)/S(ABCDE) = FO_1^2/FO^2.$$

*Біз параллель қиманың ауданының пирамида табанының ауданына қатынасы пирамида төбесінен қимаға дейінгі қашықтықтың квадратының пирамида биіктігінің квадратына қатынасына тең болатынын дәлелдедік.*

Дұрыс пирамидадан алынған қиық пирамиданы *дұрыс қиық пирамида* дейді. Бүйір жағының биіктігі дұрыс қиық *пирамиданың апофемасы* деп аталады. 52.2-суреттегі $M_1M$ кесіндісі дұрыс қиық пирамиданың апофемасы.

*Дұрыс қиық пирамиданың*
- *бүйір жақтары тең;*
- *бүйір қырлары тең;*
- *апофемалары тең;*
- *әрбір табан қабырғасындағы екіжақты бұрыштары тең;*
- *бүйір қырларындағы екіжақты бұрыштары тең*

болатынын дәлелдеуге болады.

**5-теорема.** ***Дұрыс қиық пирамиданың бүйір беті оның табандарының периметрлерінің қосындысының жартысын апофемасына көбейткенге тең:***

$$S_{\text{қ. пир. б.б}} = \frac{1}{2}(P + P_1)k.$$

Дәлелдеуі.

$n$ бұрышты дұрыс қиық пирамиданың бүйір беті оның бүйір жақтары болатын өзара тең $n$ трапециядан тұрады. Осы трапециялардың бірінің табан қабырғалары $a$ және $b$ болып, қиық пирамиданың апофемасы $k$-ға тең болса, онда осы бүйір жағының ауданы $\frac{1}{2}(a + b)k$-ға тең. Пирамидада мұндай бүйір жақтардың саны $n$-ге тең, сондықтан

$$S_{\text{қ. пир. б.б}} = \frac{1}{2}(a+b)\cdot k\cdot n = \frac{1}{2}(a\cdot n+b\cdot n)\cdot k = \frac{1}{2}(P+ P_1)\cdot k,$$

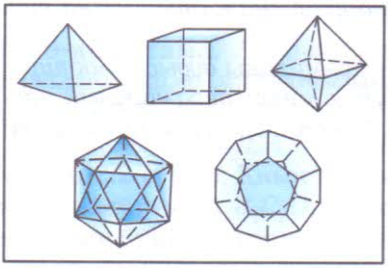
мұндағы $P$ және $P_1$ — пирамида табандарының периметрлері.

?!

1. а) Төртбұрышты қиық пирамиданың; ә) бесбұрышты қиық пирамиданың; б) алтыбұрышты қиық пирамиданың қанша төбесі, қыры және жақтары бар?
2. Төртбұрышты, бесбұрышты қиық пирамидаларды және олардың жазбаларын бейнелеңдер.
3. Дұрыс қиық пирамиданың моделін алып, қажетті өлшеулер жүргізіңдер және оның бүйір бетінің, толық бетінің аудандарын есептеңдер.

4. Табандарының қабырғалары 7 см және 5 см, ал апофемасы 2 см болатын дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың бүйір бетінің және толық бетінің аудандарын табыңдар.
5. Табандарының қабырғалары 10 см және 4 см, ал бүйір қыры 5 см болатын дұрыс үшбұрышты қиық пирамиданың бүйір бетінің және толық бетінің аудандарын табыңдар.
6. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың жоғарғы табанының қабырғасы 1 см-ге тең, ал төменгі табан қабырғасы одан бес есе ұзын. Пирамиданың бүйір бетінің ауданы $24\sqrt{2}$ см$^2$-ге тең. Қиық пирамиданың апофемасын және биіктігін табыңдар.

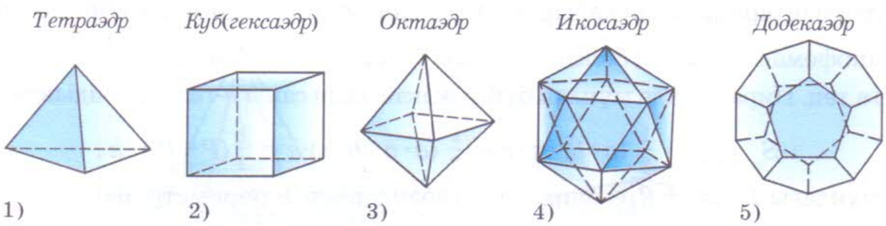
## § 6. ДҰРЫС КӨПЖАҚТАР



> Көңіл бөлерлік дұрыс
> дөңес көпжақтар аз.
> *Л. Кэрролл*
> *(1832—1898)*,
> *ағылшын жазушысы*
> *және математигі*

### 6.1. Дұрыс көпжақтар туралы жалпы мағлұматтар

Көпжақтардың ішінде *дұрыс көпжақтардың* тарихта алатын орны ерекше (53-сурет). Олардың жақтары — өзара тең дұрыс көпбұрыштар. Ежелгі заман математиктері бұл көпжақтарды зерттеп үйренуге көп көңіл бөлген. Дұрыс көпжақтардың саны бар болғаны бесеу-ақ. Бұл көпжақтарды ежелгі ұлы грек ойшылы Платон (б.з.д. 427—347 ж.ж.) көрсеткен әлемнің идеалистік бейнесінде *Платон денелері* деп те атайды, олардың төртеуі төрт стихияны бейнелейді: *тетраэдр* — от, *куб* — жер, *икосаэдр* — су, *октаэдр* — ауа.



*Тетраэдр* 1) *Куб(гексаэдр)* 2) *Октаэдр* 3) *Икосаэдр* 4) *Додекаэдр* 5)

53-сурет

Бесінші дұрыс көпжаққа — *додекаэдрге* көңіл аударайық. Ежелгі ғалымдардың ойынша, бүкіл әлем додекаэдр пішіндес, яғни олардың айтуынша, біз дұрыс додекаэдр пішіндес аспан кеңістігінің ішінде өмір сүреміз.

Көпжақтардың атаулары да ежелгі грек сөздерімен байланысты, олар жақтар санын білдіріп тұр. *Эдра* — "жақ" деген ұғымды береді. Көпжақтардың модельдерімен жұмыс жасай отырып, өздерің-ақ оларды аударып аласыңдар: *Тетра* — төрт, *Гекса* — алты; *Окта* — сегіз; *Икоса* — жиырма; *Додека* — он екі.


54-сурет

Дұрыс тетраэдрді, кубты, октаэдрді ойлап табу қиын болмаған, себебі олардың пішіндері табиғи кристалдарда кездесіп отырады, мысалы, ас тұзының ($NaCl$) монокристалы — куб, алюмокалийлі ашудастар (квасцы $KAl(SO_4)_2 \times 12H_2O$) монокристалы — октаэдр. Пирит ($FeS$) кристалдарына ұқсастыру арқылы ежелгі гректер додекаэдрдің пішінін білген деген болжам бар. Додекаэдрді білген соң оның он екі жағының центрлерін төбелер етіп алып икосаэдрді құру да қиын болмаған (54-сурет).

Бұл аталған дұрыс көпжақтардың жақтары дұрыс көпбұрыштардың қандай да бір түріне жатады.

## 6.2. Эйлер теоремасы

Геометрияның ұлы теоремаларының бірі Эйлер теоремасымен танысайық.

> Леонард Эйлер — XVIII ғасыр ғұламасы, Санкт-Петербург Академиясының академигі, ұлы математиктердің бірі. Математиканың, механиканың және астрономияның әр түрлі салалары бойынша көптеген ғылыми еңбектердің (850-ден астам) авторы. Эйлер теоремасы және оның тағы да басқа еңбектері қазіргі геометрия ғылымы салаларының бірі — топологияның негізін қалады.

Көпжақтың жақтарының санын Г, төбелер санын В, қырларының санын Р әрпімен белгілейік. Бұл үш сан кез келген қарапайым көпжақтар (саңылауы жоқ) үшін

$$В + Г - Р = 2$$

теңдігімен байланысады екен. Мысалы, кубта $В = 8, Г = 6, Р = 12$. Сонда

$$8 + 6 - 12 = 2.$$

**Осы ереженің кез келген дұрыс көпжақ үшін орындалатынын тексеріңдер.**

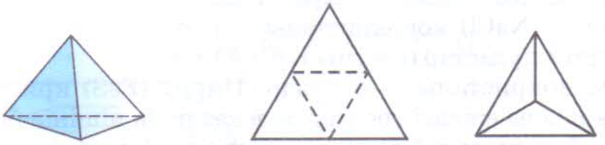
Орындалған тәжірибелердің қорытындысы мына теореманы негіздеуге мүмкіндік береді:


Л. Эйлер
(1707—1783)

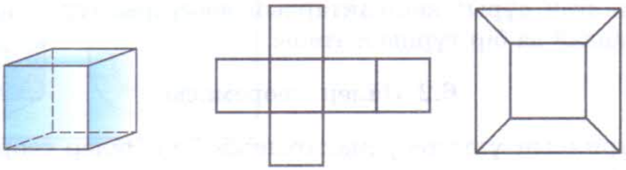
**6-теорема**. ***Кез келген қарапайым көпжақтың жақтары мен төбелер санының қосындысы оның қырларының санынан 2-ге артық.***

Эйлер теоремасы “Барлық таңданарлық нәрселер қарапайым болады!” деп айтылатын шындықты растайды.

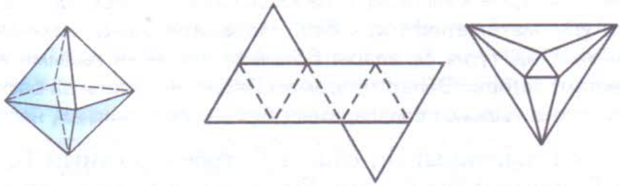
Леонардо да Винчи дұрыс көпжақтардың каркастық модельдерін жасаған. Ол оның қырларын ағаштан дайындаған. Егер осы модельге оның бір жағының центріне қарама-қарсы нүктеден қарасақ, онда бұл жақ үлкен көпбұрыш болып көрінеді де, қалған жақтары осы жақтың ішінде қалады. Көпжақтың мұндай бейнесі *Шлегель диаграммасы* деп аталады.



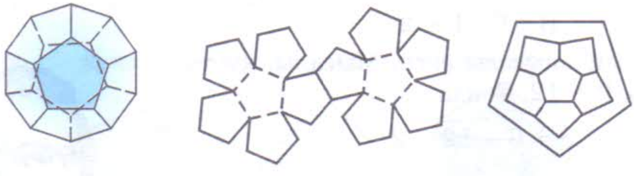
Тетраэдр



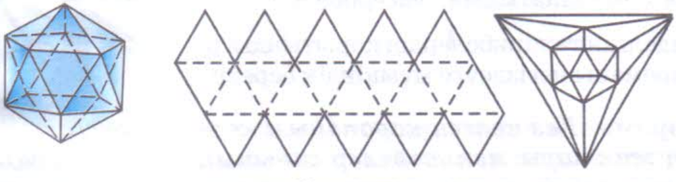
Куб



Октаэдр



Додекаэдр



Икосаэдр

55-сурет

55-суретте бес платондық дене бейнеленген. Бірінші бағанда модельдің перспективті сызбасы, екінші бағанда көпжақтың жазбасы, ал үшінші бағанда Шлегель диаграммасы бейнеленген. Суретте көпжақтың жақтарының құрылымы мен төбелердің төңірегінде орналасу жағдайлары жақсы көрініп тұр. Бұл сурет көпжақтардың жазбалары туралы түсінікті кеңейтуге көмектеседі.

Біз енді барлық дұрыс көпжақтардың жазбалары қалай көрінетінін білеміз (55-сурет).

1. Куб пен тетраэдрдің қанша жағы мен қыры бар? Олардың бір төбесінде қанша қыры тоғысады?
2. Дұрыс көпжақтардың жақтары қандай фигуралар болуы мүмкін?
3. Дұрыс көпжақтың бір төбесінде екі, үш, төрт, бес қырының тоғысуы мүмкін бе?
4. Дұрыс көпжақтың жағы үшбұрыш, төртбұрыш, бесбұрыш болуы мүмкін бе?
5. Дұрыс төртбұрышты пирамиданы дұрыс көпжақ деп алуға бола ма?
6. Биіктігі 2-ге тең тетраэдрдің әрбір төбесінен 1-ге тең қашықтықта жазықтық қиып өтеді. Нәтижесінде қандай фигура аламыз?
7. Қандай екі пирамидадан октаэдр құрастыруға болады?
8. Дұрыс октаэдрдің қимасы а) алтыбұрыш; ә) онбұрыш болуы мүмкін бе?
9. Төбелері а) кубтың; ә) тетраэдрдің; б) октаэдрдің жақтарының центрлері болатын көпжақ дұрыс көпжақ бола ма?
10. Кубтың бір төбесінен оның үш жағының диагоналі жүргізілген және олардың ұштары кесінділермен қосылған. Қырлары аталған 6 кесінді болатын пирамиданың тетраэдр екенін дәлелдеңдер.
11. Қыры 2 см-ге тең октаэдрдің жазбасын салыңдар.
12. Жазбалары бойынша дұрыс көпжақтардың макеттерін дайындаңдар.

# II тарау. АЙНАЛУ ДЕНЕЛЕРІ

## § 7. ФИГУРАЛАРДЫ ОСЬТЕН АЙНАЛДЫРА БҰРУ

56-сурет

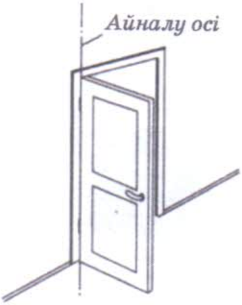
Жазықтықтағы фигураларды центрден айналдыра бұруды планиметрия курсында қарастырғанбыз.

Практикада бізге фигураларды жазықтықта бұруға қарағанда *кеңістікте осьтен айналдыра бұру* жиі кездеседі.

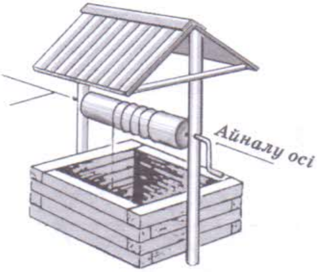
Сендер күнделікті өмірде денелердің өз осінен айналуын бақылап, оған куә болып жүрсіңдер. Мысалы, Жер Күнді айнала қозғала отырып, өз осінен де айналады. Жер Күнді толық бір айналып өткен уақыт ішінде өз осінен 365 рет айналып үлгереді. Сонымен біз бірден екі қозғалысқа қатысамыз: бір тәулік ішінде Жермен бірге оның осінен толық бір айналым жасасақ, бір жылда Күнді толық бір рет айналып өтеміз. Күннің де өз айналу осі бар және ол өз осінен айналады.

Диірмен ебелектерінің (қалақтарынын) қозғалысы фигураның өз осінен айналуына көрнекі мысалдың бірі болып табылады (56-сурет).

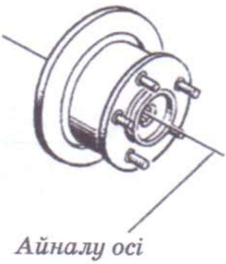
Фигуралардың өз осінен айнала қозғалысымен сендер күнделікті өмірде жиі кездесіп отырасыңдар, мысалы, сыныпқа кірерде есік ашасыңдар (57-сурет), бұл есіктің (тікбұрышты параллелепипедтің) өз осінен айналуы (топсалар орналасқан түзу оның айналу осі). Құдықтан су алуға барғанда шелектің бауын осьтен айналдыра цилиндр тәріздес орамаға айналдыра орайсыңдар (58-сурет).



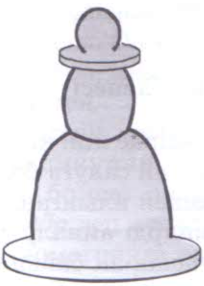
57-сурет



58-сурет



59-сурет



60-сурет

61-сурет

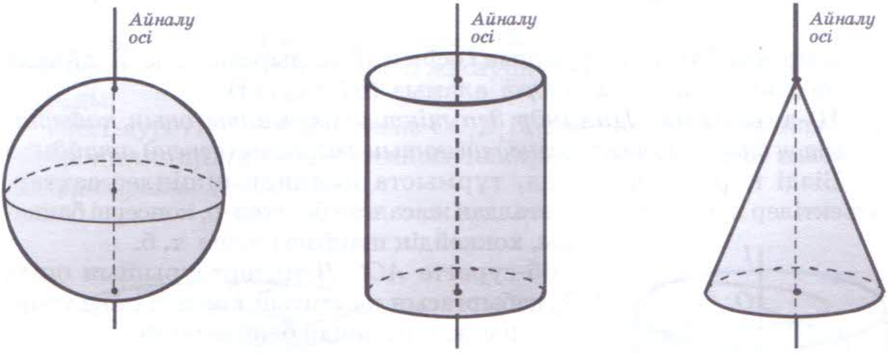
Осындай мысалдарды техникадан да келтіруге болады: тікұшақтың ебелектері, турбиналардың айналу валдары, станоктардың айналу тетіктері (59-сурет) және т.б.

Айналу осьтері бар, яғни қайсыбір осьтен белгілі бір бұрышқа айналдырғанда өзіне-өзі көшетін фигуралар да кездеседі.

60-суретте айналу осі бар шахмат фигурасы бейнеленген. Вазаның да айналу осі бар (61-сурет).

Айналу осьтері, әсіресе дөңгелек фигураларда — сферада, шарда, цилиндрде, конуста болады (62-сурет). Сондықтан оларды кейде *айналу денелері* деп те атайды.

62-суретте бейнеленген фигуралардың кез келгенін өз осінен қандай да бір бұрышқа айналдырғанда, өзіне-өзі көшеді.



62-сурет

Айналу денесін алу үшін оның осін және айналғанда осы дене шығатын фигураны беру жеткілікті. Денені сөзбен суреттегенде кейде оның осінің орнына айналу осіне тиісті кесіндіні көрсетеміз. Мысалы, "үшбұрыштың қабырғасын қамтитын осьтен үшбұрыш айналғанда пайда болған дене" дегеннің орнына қысқаша "үшбұрыштың қабырғасынан айналғанда пайда болған дене" деп айтамыз.

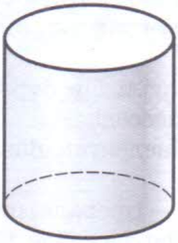
# § 8. ЦИЛИНДР

## 8.1. Цилиндр — айналу денесі

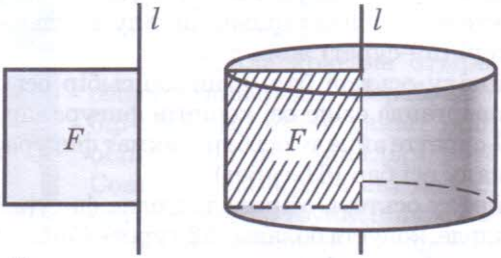
Геометриялық фигура — цилиндрді өмірде жиі кездестіреміз (63-сурет). Бұл фигураны қалай анықтап, қалай салуға болады?

“Цилиндр” сөзі гректің *kylindros* сөзінен алынған, ол “валик” — “оқтау” мағынасын білдіреді. Біз цилиндрді айналу денесі ретінде қарастыратынымыз тақырыптың аталуынан-ақ байқалып тұр.

Тіктөртбұрышты оның бір қабырғасын қамтитын осьтен айналдыру арқылы цилиндрді алуға болады. 64.1-суретте $F$ тіктөртбұрышы және оның бір қабырғасын қамтитын $l$ осі берілген.



63-сурет



1)

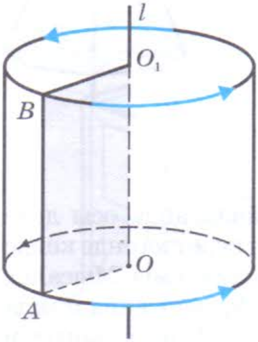
2)

64-сурет

Егер осы $F$ тіктөртбұрышын $l$ осінен айналдырсақ, онда біз айналу денесі (фигурасы) — *цилиндрді* аламыз (64.2-сурет).

**10-анықтама.** ***Цилиндр*** *деп тіктөртбұрышты оның қабырғаларының бірінен айналдырғанда шығатын фигураны (денені) атайды.*

Бізді қоршаған ортада, тұрмыста цилиндр пішіндес заттар, объектілер жиі кездеседі: металдан жасалған бөшкелер, консерві банкалары, хоккейдің шайбасы және т. б.



65-сурет

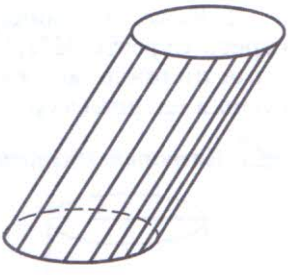
65-суретте $AOO_1B$ тіктөртбұрышын оның $OO_1$ қабырғасын қамтитын $l$ осінен айналдырғанда шыққан цилиндр бейнеленген.

$AOO_1B$ тіктөртбұрышының $OO_1$ осіне параллель $AB$ қабырғасы ***цилиндрдің бүйір беті*** деп аталатын қисық бетті жасайды және ол ***цилиндрдің жасаушысы*** деп аталады. $AO$ және $O_1B$ кесінділерінің айналуынан ***цилиндрдің табандары*** деп аталатын өзара тең екі дөңгелек аламыз. Сонымен, цилиндрдің беті *цилиндрдің табандары* деп аталатын екі дөңгелектен және цилиндрдің бүйір бетінен тұрады.

Жасаушының ұзындығы цилиндрге биіктік болып табылады. Ол табан жазықтықтарының арақашықтығына, яғни $OO_1$ кесіндісінің ұзындығына тең.

Егер цилиндрдің жасаушысы оның табанына перпендикуляр, яғни цилиндрдің биіктігіне тең болса, онда цилиндр ***тік дөңгелек цилиндр*** деп аталады.

Дегенмен геометрияда және бізді қоршаған ортада цилиндрдің басқа түрлері де кездеседі (66-сурет).



66-сурет

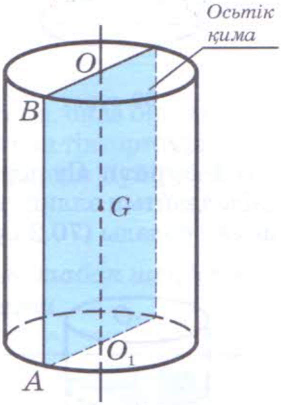
## 8.2. Цилиндрдің қимасы

Цилиндрдің жазықтықтармен әр түрлі қималарын қарастырайық.

*Цилиндрдің жазықтықпен қимасы* деп жалғыз нүктеден, цилиндрдің жасаушысынан немесе табанынан өзгеше фигураны, яғни аталғандардан өзге цилиндр мен жазықтықтың ортақ бөлігін атайды.

**1.** Қиманы цилиндрдің осі арқылы жүргізуге болады (67-сурет). Мұндай қималар *остік қималар* деп аталады.

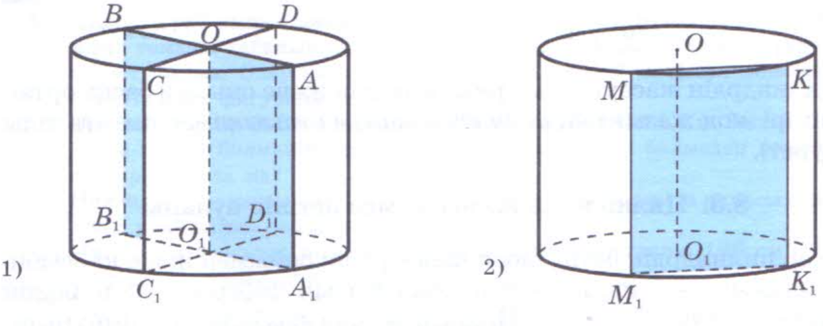
**Остік қималардың тіктөртбұрыш болатынын негіздеп беріңдер.**



67-сурет

Остік қиманың қабырғалары табандарының диаметрлерінен және екі жасаушыдан тұрады.

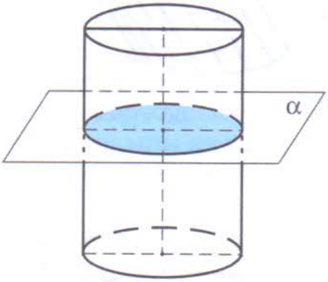
68.1-суреттегі $AA_1B_1B$ және $CC_1D_1D$ қималары — остік қималар. Егер цилиндрдің остік қимасы квадрат болса, ондай цилиндр *теңқабырғалы* деп аталады.



68-сурет

**2.** Қиманы цилиндрдің осіне параллель жүргізуге болады (68.2-сурет). Суретте $MM_1K_1K$ қимасы $OO_1$ осіне параллель өтіп тұр. Бұл қима цилиндр мен екі жасаушыдан өтетін жазықтықтың қиылысуынан алынып тұр.

**Қиманың тіктөртбұрыш болатынын негіздеп беріңдер.**

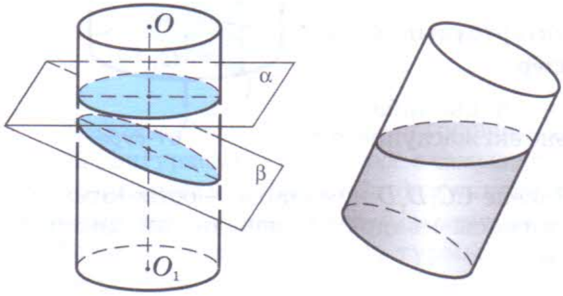


69-сурет

**3.** Цилиндрді оның осіне перпендикуляр α жазықтығымен қиюға да болады (69-сурет).

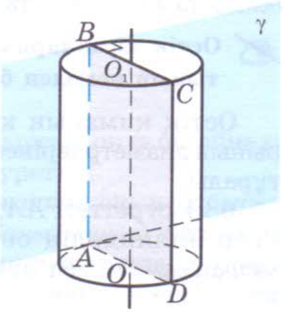
**Бұл жағдайда қима жазықтық табан жазықтықтарына параллель, ал цилиндрдің қимасы оның табандарына тең дөңгелек болатынын негіздеп беріңдер.**

**4.** Егер цилиндрдің бүйір бетін оның табандарын қимайтын және цилиндр осіне перпендикуляр емес β жазықтығымен қисақ, онда қимада эллипс аламыз (70.1-сурет). Су құйылған стақанды еңкейткенде, су бетінің қабылдайтын эллипс пішіні қарастырылып отырған қимаға көрнекті мысал болады (70.2-сурет).



1) 2)

70-сурет

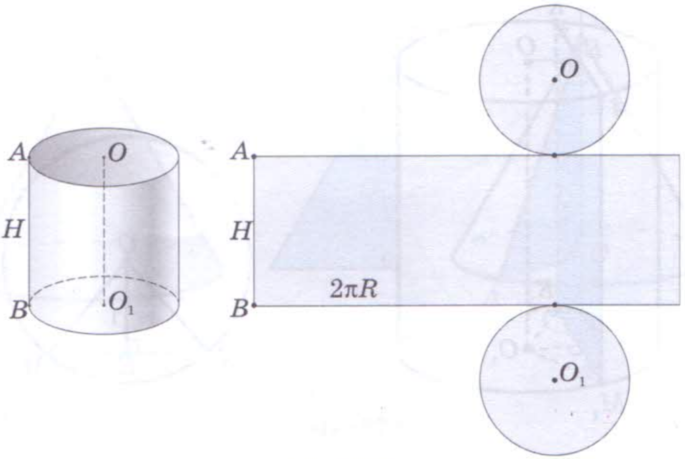


71-сурет

Цилиндрдің жасаушысы арқылы өтетін және онымен басқа ортақ нүктелері жоқ жазықтық *цилиндрге жанама жазықтық* деп аталады (71-сурет).

## 8.3. Цилиндрдің жазбасы мен бетінің ауданы

Егер цилиндрдің бетін табан шеңберлері бойымен және қайсыбір жасаушысының бойымен қиып алып жазып жіберсек, цилиндрдің *жазбасын аламыз* (72-сурет). Цилиндр бетінің жазбасы тіктөртбұрыштан және өзара тең екі дөңгелектен тұрады.



72-сурет

Егер цилиндрдің радиусы $R$, ал биіктігі $H$ болса, онда оның бүйір беті қабырғаларының ұзындығы $2\pi R$ мен $H$ болатын тіктөртбұрышқа жазылады. Осы жазбаның ауданы $2\pi RH$ цилиндрдің бүйір бетінің ауданы ретінде алынады.

Сонымен, біз мына теореманы дәлелдедік.

**7-теорема.** ***Цилиндрдің бүйір бетінің ауданы табан шеңберінің ұзындығын оның биіктігіне көбейткенге тең, яғни***

$$S_{\text{ц.б.б}} = 2\pi R H.$$

Цилиндрдің толық бетінің ауданын $S_{\text{ц.т.б}}$ табу үшін оның бүйір бетінің ауданына табандарының аудандарын қосу керек:

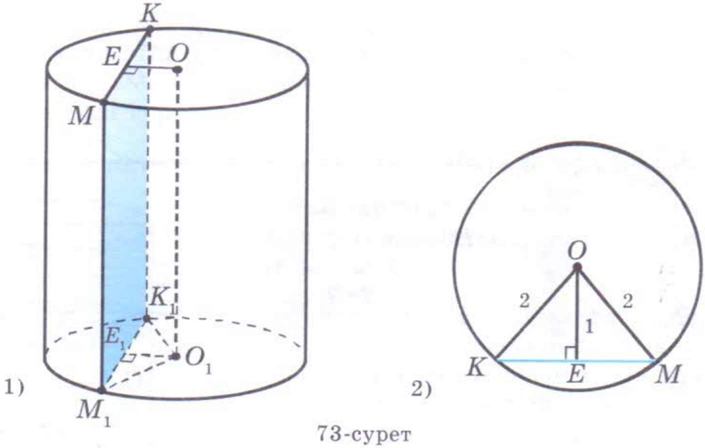
$$S_{\text{ц.т.б}} = 2\pi R H + 2\pi R^2$$

немесе

$$S_{\text{ц.т.б}} = 2\pi R(H+R).$$

?!

1. Цилиндр табанының диаметрі 12 см, биіктігі 20 см. Бүйір бетінде жататын және төменгі табанынан 10 см-ге тең қашықтықта болатын нүктелерді қарастырайық. Олар қандай биіктікте орналасады? Олардың саны қанша? Олар қандай фигураны құрайды?
2. Цилиндр тәрізді бөшкенің радиусы 0,6 м және биіктігі 1,6 м. Бөшке биіктігі 1,9 м-ге тең бөлменің еденінде тұр. Бөшкені осы бөлмеден домалатып шығаруға бола ма?
3. Цилиндрдің радиусы 3 см, биіктігі 8 см. Цилиндрдің осьтік қимасы диагоналінің ұзындығын табыңдар.
4. Цилиндрдің осьтік қимасы — квадрат. Оның ауданы 196 см$^2$-ге тең. Цилиндрдің табанының ауданын табыңдар.
5. Цилиндрдің радиусы 6 см, осьтік қимасының диагоналі 13 см. а) Цилиндрдің биіктігін; ә) осьтік қимасының ауданын; б) бүйір бетінің ауданын; в) цилиндрдің толық бетінің ауданын табыңдар.



73-сурет

6. Тіктөртбұрыштың қабырғалары 4 см және 5 см. Тіктөртбұрыштың кіші қабырғасынан айналғанда шыққан дененің толық бетінің ауданын табыңдар.

7. Цилиндрдің ауданы және бүйір бетінің ауданы сәйкесінше 50 см$^2$ және 30 см$^2$. Цилиндрдің радиусы мен биіктігін табыңдар.

8. Радиусы 2 см және биіктігі 4 см-ге тең цилиндр берілген. Оның осінен 1 см қашықтықта оське параллель қима жүргізілген. Қиманың ауданын және периметрін табыңдар (73-сурет).

9. Цилиндрдің биіктігі 16 см, радиусы 10 см. Цилиндрдің осіне параллель және одан 6 см қашықтықта өтетін қиманың ауданын табыңдар.

10. Цилиндрдің табан радиусы мен биіктігі 5 см-ге тең. Цилиндрге оның осіне және өзара параллель екі қима жүргізілген. Бұл қималардың аудандары 40 см$^2$ және 30 см$^2$. Қималардың арақашықтығын табыңдар.

11. Цилиндрдің радиусы 5 дм, ал биіктігі 8 дм. Цилиндрдің табанына перпендикуляр және табан шеңберінен 60° доға қиып түсіретін қиманың ауданын табыңдар.

## § 9. КОНУС

### 9.1. Конус — айналу денесі

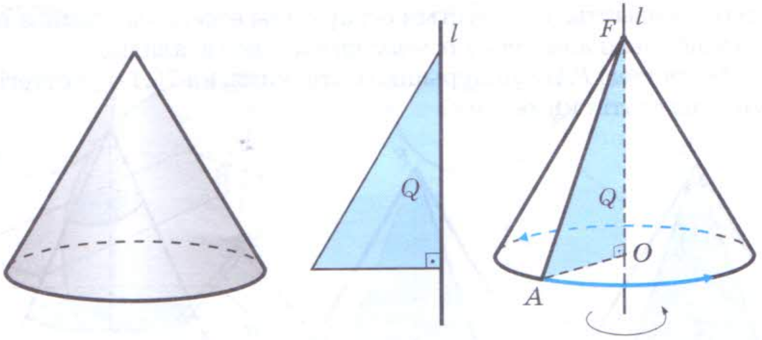
Тағы да бір ерекше геометриялық фигураны — конусты қарастырайық (74.1-сурет).

Бізге $Q$ тікбұрышты үшбұрышы берілсін (74.2-сурет). Егер осы тікбұрышты үшбұрышты оның катеті арқылы өтетін $l$ осінен айналдырсақ, нәтижесінде айналу денесі — конусты аламыз (74. 3-сурет).

**11-анықтама.** *Тікбұрышты үшбұрышты катетінен айналдырғанда шығатын фигура* ***конус*** *деп аталады.*

74.3-суретте $O$ бұрышы тік болатын $FAO$ үшбұрышын оның $FO$ катетінен айналдырғанда алынған конус бейнеленген. Осы суретті және жинақталған ақпараттарды пайдаланып, конустың мынадай қасиеттерін алуға болады:

**1.** $OA$ катеті айналғанда *конустың табаны* деп аталатын дөңгелекті сызып шығады.



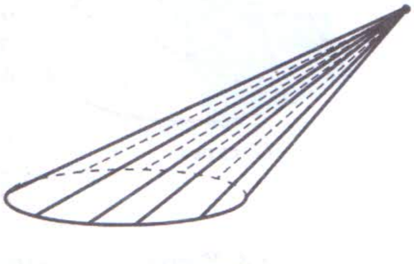
1) 2) 3)

74-сурет

2. Конустың табан жазықтығы оның $FO$ осіне перпендикуляр, $\angle FOA=90^\circ$. Енді біз конустың биіктігін анықтай аламыз.

**12-анықтама.** *Конустың төбесінен оның табан жазықтығына жүргізілген перпендикуляр конустың* ***биіктігі*** *деп аталады.*

3. $FA$ гипотенузасы осьтен айналғанда *конустың бүйір бетін* сызып шығады. Табан шеңберінің кез келген нүктесін конустың $F$ төбесімен қосатын кесінділердің проекциялары тең, сондықтан олар — өзара тең кесінділер. Бұл кесінділер *конустың жасаушылары* деп аталады. Конустың бүйір беті де *конустық бет* деп аталады.



75-сурет

Табаны дөңгелек және биіктігінің табаны дөңгелектің центріне дәл түсетін конусты *тік дөңгелек конус* деп атайды (грек. *konos* — "қарағай бүршігі").

75-суретте көлбеу (тік емес) конус бейнеленген, мұндай конустар мектеп курсында қарастырылмайды (75-суреттегі конус айналу денесі болмайды).

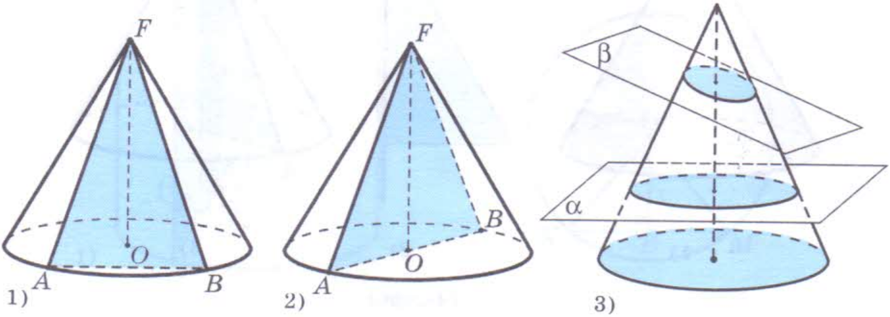
### 9.2. Конустың жазықтықпен қимасы

Конус пен жазықтықтың қиылысуы конустың бөлігі болуы мүмкін. Бұл жағдайда біз әр түрлі қималар аламыз, айталық, қиюшы жазықтық конустың екі жасаушысы арқылы өтеді дейік.

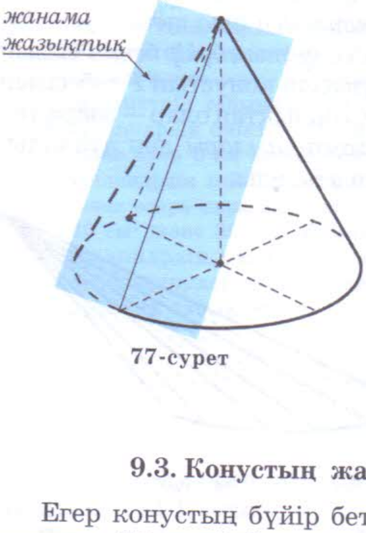
Конустың қайсыбір екі жасаушысын қамтитын екі түзу арқылы бір ғана $\alpha$ жазықтығын жүргізуге болады. Бұл жазықтық конустың табанын хорда бойымен, ал бүйір бетін екі жасаушы бойымен қиып өтеді. Аталған жазықтық пен конустың ортақ бөлігі теңбүйірлі үшбұрыш (76.1-сурет) болып табылады.

Егер $\alpha$ жазықтығы конустың осі арқылы өтсе, онда қимада пайда болған үшбұрыш *конустың осьтік қимасы* деп аталады.

76.2-суреттегі $FAB$ үшбұрышы осьтік қима, ал 76.1- суреттегі $FAB$ үшбұрышы осьтік қима емес.



76-сурет



77-сурет

Конусты оның осіне перпендикуляр $\alpha$ жазықтығымен қиюға болады. Бұл жағдайда қиюшы жазықтық табан жазықтығына параллель, ал конустың қимасы дөңгелек болады (76.3-сурет) (өз тұжырымдарыңды негіздеңдер).

Егер конустың бүйір бетін табанымен қиылыспайтын және конустың осіне перпендикуляр емес жазықтықпен қиып өтсек, онда қимада эллипс аламыз (76.3-сурет).

Конустың жасаушысы арқылы өтетін, конуспен басқа ортақ нүктелері жоқ жазықтық конусқа *жанама жазықтық* деп аталады (77-сурет).

### 9.3. Конустың жазбасы және бетінің ауданы

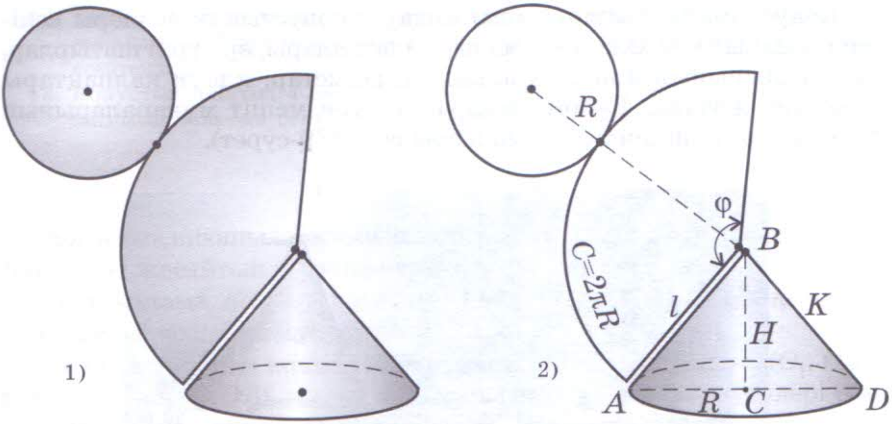
Егер конустың бүйір бетін қайсыбір жасаушысының бойымен, мысалы, $AB$-ның бойымен қиып, жазықтыққа жазсақ, онда конустың *бүйір бетінің жазбасын аламыз* (78.1-сурет).

Конус табанының радиусы $R$, жасаушысының ұзындығы $l$, ал биіктігі $H$ болсын (78.2-сурет), яғни осінен айналғанда қарастырылып отырған конус шығатын тікбұрышты үшбұрыштың қабырғалары белгілі дейік. Пифагор теоремасына сәйкес бұл шамалар

$$l^2 = R^2 + H^2$$

теңдігімен байланысады.

Демек, бұл шамалардың екеуін білсек, үшіншісін таба аламыз. Конус табанының ауданы $\pi R^2$-қа тең екені белгілі. Ал конустың бүйір



78-сурет

бетінің ауданын өлшеу үшін оның бүйір бетін жасаушыларының бірінің бойымен "қиып", жазықтыққа жазамыз. Сонда радиусы $l$-ге тең дөңгелектің секторын аламыз (78.2-сурет). *Конустың бүйір бетінің ауданы* дегеніміз — осы сектордың ауданы. Оны есептеу үшін алынған секторға сәйкес бұрыштың φ градустық шамасын табамыз. Оның доғасының ұзындығы конустың табан шеңберінің ұзындығына, яғни $2\pi R$-ге тең. Екінші жағынан градустық өлшемі φ-ге тең сектор доғасының ұзындығы $\pi l \frac{\varphi}{180^\circ}$ болады. Сондықтан

$$2\pi R = \pi l\ \frac{\varphi}{180^\circ},\ \text{бұдан}\ \varphi = \frac{360^\circ \cdot R}{l}.$$

$S_{\text{сек}} = \frac{\pi l^2}{360^\circ} \cdot \varphi$ өрнегіне φ-дің табылған мәнін қойсақ, конустың бүйір бетінің ауданын есептеу формуласын аламыз:

$$S_{\text{кон.б.б.}} = \frac{\pi l^2}{360^\circ} \cdot \varphi = \frac{\pi l^2}{360^\circ} \cdot \frac{360^\circ \cdot R}{l} = \pi R \cdot l.$$

Сонымен, біз мынадай қорытындыға келдік.

**8-теорема.** *Конустың* ***бүйір бетінің ауданы*** *оның табан шеңберінің ұзындығы мен жасаушысының көбейтіндісінің жартысына тең, яғни*

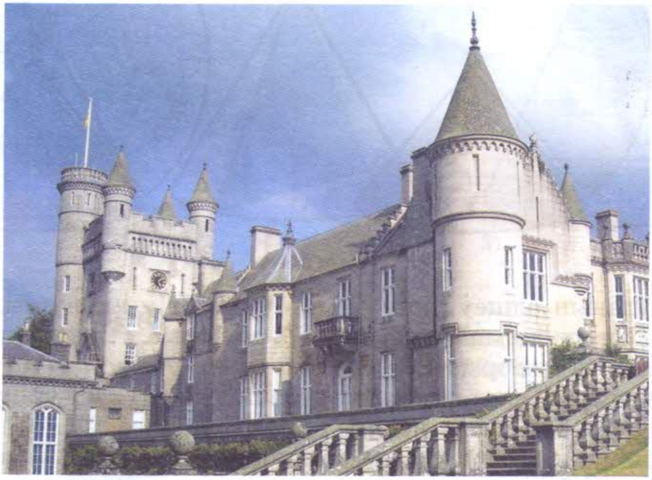
$$S_{\text{кон.б.б.}} = \pi R l,$$

мұндағы $R$ — конус табанының радиусы, $l$ — конустың жасаушысы.

Конус бетінің ауданы немесе конустың толық бетінің ауданы үшін оның жазбасының $S_{\text{толық}}$ ауданы алынады. Ол конустың бүйір бетінің ауданы мен табанының ауданының қосындысынан тұрады (78-сурет).

$S_{\text{кон.т. б}} = \pi R l + \pi R^2 = \pi R(l + R)$, мұндағы $l$ — конустың жасаушысы, $R$ — табанының радиусы.

Конус пішіндес заттарды дайындауға конустың жазбалары кеңінен қолданылады. Оларға демалыс палаткалары, әр түрлі шатырлар, қайың шырынын жинауға арналған ыдыстар, клоун қалпақтары және т.б. жатады. Кейбір ғимараттар мен мешіт мұнараларының төбелері конус пішіндес болып жабылады (79-сурет).



79-сурет

Төбелерді жабуға, бояуға, алтындауға және т. б. қажет материалдардың шығынымен байланысты есептеулер конустың бүйір бетінің және толық бетінің аудандарын есептей білуді талап етеді.

?! 1. Конустың жазықтықпен қимасында осьтік қимадан басқа теңбүйірлі үшбұрыш алуға бола ма?
2. Конустың осьтік қимасы тікбұрышты үшбұрыш болуы мүмкін бе?
3. Қиық конус пішіндес денелерге мысалдар келтіріңдер.
4. Конустың әр түрлі пішіндегі қималарын салыңдар.
5. Биіктігі $H$-қа және табанының радиусы $R$-ге тең конус берілген. Конустың биіктігін өзгертпей, а) бүйір бетінің ауданын екі есе; ә) конустың толық бетінің ауданын екі есе арттыру үшін табанының радиусын қалай өзгерту керек?
6. Конустың биіктігі 15 см, радиусы 8 см. Конустың жасаушысын табыңдар.
7. Конустың жасаушысы $12\sqrt{2}$ см-ге тең және табан жазықтығымен $45^\circ$ бұрыш жасайды. Конустың биіктігін табыңдар.
8. Конустың осьтік қимасы қабырғасы 8 см-ге тең теңбүйірлі үшбұрыш болып табылады. Конустың радиусын және биіктігін табыңдар.
9. Конустың табанының радиусы 17 дм, ал оның осьтік қимасы тікбұрышты үшбұрыш болып табылады. Осьтік қиманың ауданын табыңдар.
10. Конустың жасаушысы 13 см, биіктігі 5 см. Конус бетінің ауданын табыңдар.
11. Биіктігі 3 м және диаметрі 4 м болатын конус пішіндес шатыр (палатка) тігіп, дайындау үшін қанша квадрат метр мата қажет?

12. Конустың жасаушысы 14 м және ол табан жазықтығымен 60° бұрыш жасайды. а) Конус табанының ауданын; ә) конустың бүйір бетінің ауданын есептеңдер.

13. Конустың биіктігі 4 см, жасаушысы 5 см. Осы конустың бүйір бетінің жазбасы болатын сектордың бұрыштық шамасын табыңдар.

## § 10. ҚИЫҚ КОНУС

Конустың қиюшыларының ішінде *қиық конус* деп аталатын ерекше фигураны жасайтын қиюшы бар.

**13-анықтама.** *Конустың табаны мен табанына параллель қиманың арасындағы бөлігі* ***қиық конус*** *деп аталады* (80-сурет).

81-суретте қиық конус бейнеленген, оның табандары — $(O_1, O_1A)$ дөңгелегі мен $(O, OB)$ дөңгелегі. Олардың $O_1$ және $O$ центрлері осы дөңгелек жазықтықтарына перпендикуляр кесіндінің ұштары болады.

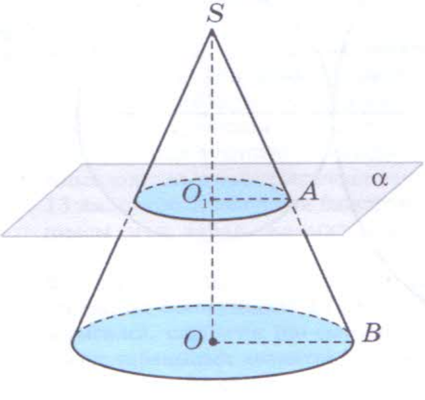
**14-анықтама.** *Қиық конустың бір табанының қайсыбір нүктесінен екінші табан жазықтығына түсірілген перпендикуляр* ***қиық конустың биіктігі*** *деп аталады.*

Қиық конустың биіктігі ретінде қиық конус табандарының центрлерін қосатын кесіндіні, яғни $OO_1$ кесіндісін алуға болады (81-сурет).

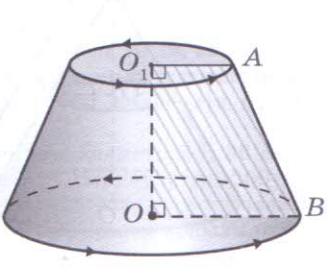
Қиық конус жасаушылары толық конус жасаушыларының бөліктері.

**Қиық конустың барлық жасаушыларының тең болатынын негіздеңдер.**

Қиық конусты тікбұрышты $OO_1AB$ трапециясын табандарына перпендикуляр бүйір қабырғасынан, яғни $OO_1$ қабырғасынан (81-сурет) айналдырғанда шыққан айналу денесі ретінде қарастыруға болады. Осылай айналдырғанда, трапецияның көлбеу бүйір қабырғасы қиық конустың бүйір бетін сызып шығады.



80-сурет



81-сурет

Қиық конусты бейнелеу үшін, алдымен толық конусты салып, содан соң параллель қиюшыны кескіндеуге (80-сурет) немесе 81-суреттегідей етіп бейнелеуге де болады.

Егер қиық конустың бүйір бетін қайсыбір жасаушысының бойымен қиған соң жазықтыққа жазсақ, онда бүйір беті толық конус жазбасының бөлігіне, яғни қиық конустың екі жасаушысымен және екі доғамен шектелген дөңгелек сектордың бөлігіне жазылады. Аталған доғалардың ұзындықтары қиық конустың төменгі және жоғарғы табан шеңберлерінің ұзындықтарына тең. Осындай фигураны *қиық конустың бүйір бетінің жазбасы* деп атайды (82-сурет).

Табандарының радиустары $R$ және $r$, жасаушысы $l$ қиық конус берілсін (82-сурет). *Қиық конустың бүйір бетінің ауданын есептеу формуласын* қорытып шығарайық.

1. Табандарының радиустары $R$ және $r$, ал жасаушысы $l$ болатын қиық конус берілсін (берілгені) (82-сурет).

2. Бізге қиық конустың бүйір бетінің ауданын табу керек (табу керегі).

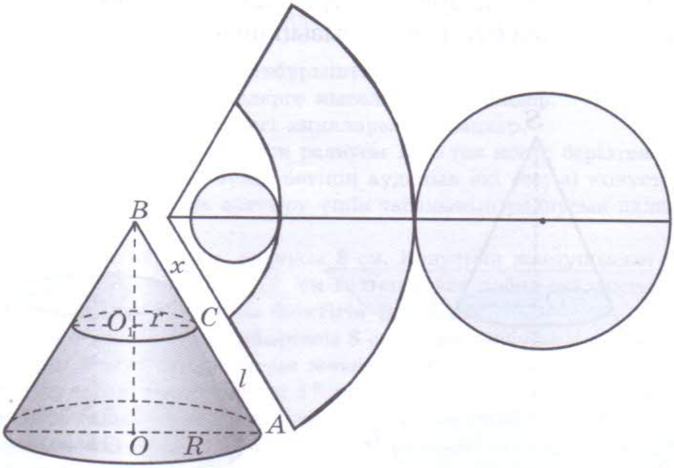
3. Дәлелдеуі.

3.1. Қиық конустың бүйір бетінің ауданын биіктіктері $BO$ және $BO_1$ болатын толық конустардың бүйір беттерінің аудандарының айырымы ретінде есептеп табуға болады (қиық конустың анықтамасы, аудандарының қасиеті) (82-сурет).

Конустың бүйір бетінің ауданының формуласы бойынша

$$S_{\text{қ.кон.б.б}} = \pi R \cdot AB - \pi rBC = \pi(R \cdot AB - rBC).$$

3.2. $BC = x$ делік, сонда $AB = l + x$ (82-сурет). Біз $x$-ті тапсақ, $AB$-ны да табамыз.



82-сурет

3.3. $AOB$ және $CO_1B$ үшбұрыштары ұқсас (үшбұрыштардың ұқсастығы туралы теорема).

3.4. $AOB$ және $CO_1B$ үшбұрыштарының ұқсастығынан $\frac{r}{R}=\frac{x}{l+x}$ (ұқсас үшбұрыштардың қасиеті, 3.3-п) аламыз.

3.5. $x=\frac{rl}{R-r}$, ал $AB=l+\frac{rl}{R-r}=\frac{Rl}{R-r}$. (3.4)

3.6. Табылған мәндерді $S_{\text{қ.кон.б.б}}$ өрнегіне апарып қоямыз:

$$S_{\text{қ.кон.б.б}}=\pi\left(R\frac{Rl}{R-r}-r\frac{rl}{R-r}\right)=\pi l\frac{R^2-r^2}{R-r}=\pi l(R+r)\,.$$

Қиық конустың бүйір бетінің ауданын табан шеңберлерінің ұзындықтары $C$ және $C_1$ арқылы өрнектейміз:

$$S_{\text{қ.кон.б.б}}=\frac{2\pi R+2\pi r}{2}\cdot l=\frac{C+C_1}{2}l\,.$$

Сонымен, мына теорема дәлелденді.

**9-теорема.** ***Қиық конустың бүйір бетінің ауданы табан шеңберлерінің қосындысының жартысы мен жасаушының көбейтіндісіне тең***

$$S_{\text{қ.кон.б.б}}=\frac{2\pi R+2\pi r}{2}\cdot l=\frac{C+C_1}{2}l\,.$$

Конустың беті үшін немесе толық беті үшін оның жазбасының ауданы алынады. Ол қиық конустың бүйір бетінің ауданынан және табан дөңгелектерінің аудандарынан тұрады (82-сурет).

$$\boxed{S_{\text{қ.кон.т.б}}=\pi l\,(R+r)+\pi R^2+\pi r^2,}$$

мұндағы $l$ — жасаушы, ал $r$ мен $R$ — конус табандарының радиустары.

?!

1. Қиық конустың а) табанына параллель жазықтықпен; ә) конустың айналу осі арқылы өтетін жазықтықпен қимасы қандай фигура болады?
2. Табан қабырғалары 12 см және 20 см және биіктігі 3 см-ге тең болатын теңбүйірлі трапеция өзінің симметрия осінен айналған. Шыққан айналу денесі бетінің ауданын табыңдар.
3. Қиық конустың табандарының радиустары 5 дм және 10 дм, ал жасаушысы 13 дм. а) Қиық конустың биіктігін; ә) осьтік қимасының ауданын; б) жасаушысы мен табан жазықтығының арасындағы көлбеулік бұрышын табыңдар.
4. Қиық конус пішіндес шелектің табандарының диаметрлері 36 см және 20 см, ал жасаушысы 17 см. Егер 1 м$^2$ бетті сырлау үшін 200 г бояу жұмсалса, шелектің іші-сыртын сырлауға қанша бояу қажет болады?
5. Конус табанының диаметрі 6 м. Конус биіктігінің ортасы арқылы биіктікке перпендикуляр өтетін қиманың ауданын табыңдар.

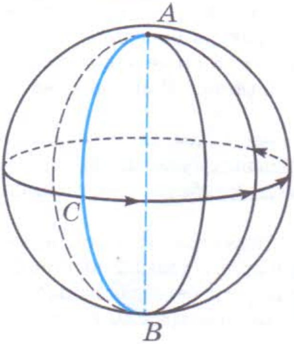
## § 11. СФЕРА ЖӘНЕ ШАР

### 11.1. Сфера мен шардың қасиеттері

Негізгі мектепте біз шеңбер мен дөңгелектің анықтамаларын беріп, олардың кейбір қасиеттерімен таныстық.

"Сфера мен шарды қалай анықтай аламыз? Оларды қалай құруға болады?" деген сұрақтар туындайды.

Бұл сұрақтарға жауап беру үшін айналу денелері түсінігіне сүйенеміз. Осы түсініктің көмегімен сфера және шардың анықтамаларын бере аламыз.



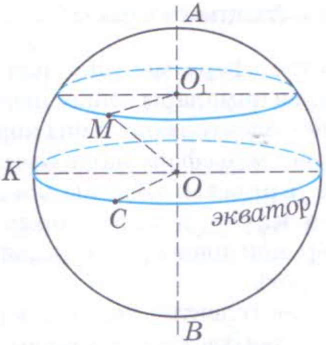
83-сурет

Айталық, $ACB$ жарты шеңбері оның $AB$ диаметрін қамтитын $l$ осінен $360^\circ$-қа айналсын, сонда айналу денесі *сфера* шығады (83-сурет).

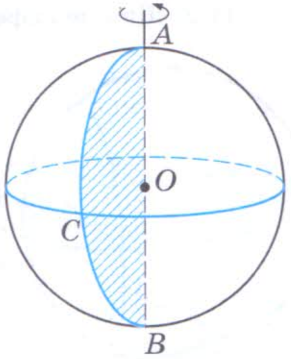
**15-анықтама.** *Жарты шеңбердің өз диаметрінен айналғанда шығатын фигураны* ***сфера*** *деп атайды.*

83-суреттегі $ACB$ жарты шеңберін *сфераның жасаушысы* деп атайды.

Сфераның $ACB$ жасаушысының әрбір $M$ нүктесі $(O_1, O_1M)$ шеңберінде, ал бұл шеңбердің өзі тұтасымен сферада жатады (84-сурет). Осындай шеңберлер *параллельдер* деп,



84-сурет



85-сурет

ал олардың ең үлкені *экватор* деп аталады. Сфераның осындай экваторының бірі — $(O,OK)$ шеңбері (84-сурет). Көрнекілік үшін кейде біз географиялық терминдерді де пайдалана береміз.

Сфераның әрбір $M$ нүктесі қандай да бір $ACB$ жарты шеңберінде жатады (84-сурет). Мұндай жарты шеңберлер *меридиандар* деп аталады. $OM$ кесіндісі жарты шеңбердің жасаушысы $OA$ радиусына тең.

Сфераларды да шеңберлер секілді $(O,R)$ сферасы деп қысқаша белгілеп жазуға болады және ол "центрі $O$ нүктесіндегі радиусы $R$-ге тең сфера" деп оқылады.

Шарды да осы сияқты анықтауға болады. 85-суретте $ACB$ жарты дөңгелегі диаметрді қамтитын осьтен айналған. Нәтижесінде центрі $O$ нүктесінде болатын шар аламыз.

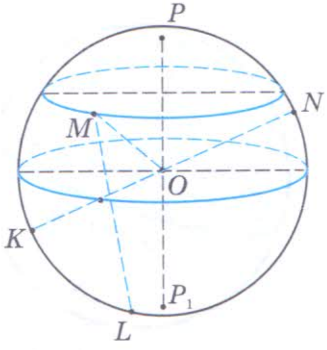
**16-анықтама.** *Жарты дөңгелек өзін шектейтін диаметрден айналғанда шығатын фигураны* ***шар*** *деп атайды.*

Шар "$(O;R)$ шары" деп белгіленеді, "центрі $O$ нүктесіндегі радиусы $R$-ге тең шар" деп оқылады.

Шардың беті — сфера, ол сәйкес жарты шеңбердің айналуынан пайда болады. Сфераны басқаша *шар беті* деп те атайды.

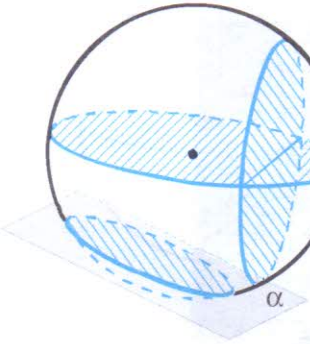
Центрден қашықтығы радиустан кіші нүктелер шардың ішкі нүктелері, ал центрден қашықтығы радиустан үлкен нүктелер шарға қарағанда сыртқы нүктелер болатыны түсінікті.

Сфераның екі нүктесін қосатын $ML$ кесіндісі *сфераның (шардың) хордасы* деп аталады, 86-суретте осындай $PP_1$, $KN$ және т.б. хордалар кескінделген. Сфераның (шардың) центрі арқылы өтетін хорда *сфераның (шардың) диаметрі* деп аталады, $KN$ және $PP_1$ — диаметрлер (86-сурет).



86-сурет

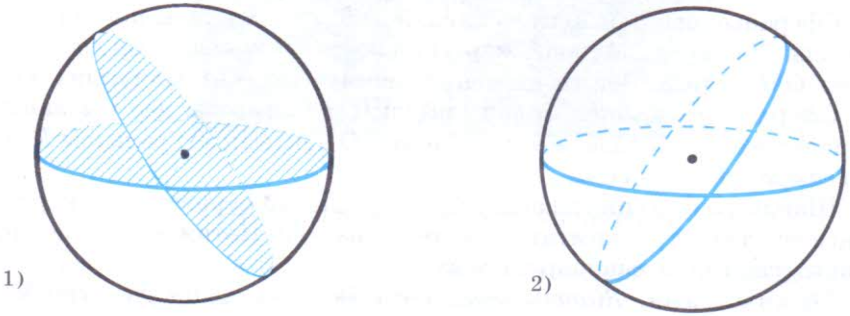
## 11.2. Шар мен сфераның жазықтықпен қимасы



87-сурет

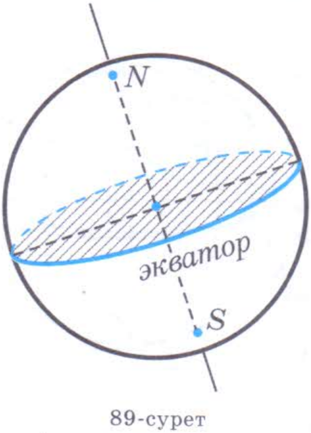
87-суретте сфера мен шардың жазықтықтармен қималары сәйкес шеңберлер және дөңгелектер болатыны көрініп тұр. Бізді шар мен сфера және олардың центрлері арқылы өтетін жазықтықтармен қиғанда пайда болатын дөңгелектер мен шеңберлер қызықтырады (87-сурет).

Мұндай дөңгелектер мен шеңберлер сәйкесінше *үлкен дөңгелектер* және *үлкен шеңберлер* деп аталады. 88.1-суретте шардың үлкен дөңгелектері, ал 88.2-суретте үлкен шеңберлері бейнеленген. Үлкен дөңгелек шар бетімен (сферамен) үлкен шеңбер бойымен қиылысады.



88-сурет

Жердің шар тәріздес екенін еске алайық. Сонда үлкен дөңгелектің диаметрі шамамен 12 800 км-ге тең болады. Центр арқылы өтпейтін кез келген басқа қима үлкен дөңгелек емес және оның диаметрі аталған диаметрден кіші. Жердің экваторы үлкен шеңбер болып табылады. Ол жердің центрі арқылы жердің айналу осіне перпендикуляр өтетін жазықтықпен Жер шарының қиылысуынан шығады (89-сурет).



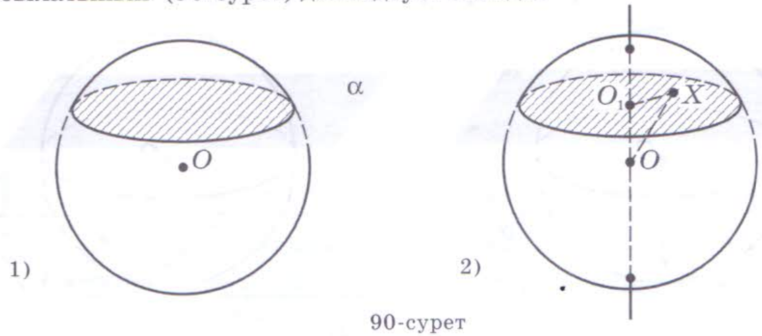
89-сурет

***Шарды жазықтықпен қиғанда пайда болатын кез келген қиманың дөңгелек болатынын және бұл дөңгелектің центрі шардың центрінен қиюшы жазықтыққа түсірілген***

***перпендикулярдың табаны болып табылатынын*** дәлелдеуге болады.

Шардың центрі арқылы өтетін жазықтық *диаметрлік жазықтық* деп аталады. Шардың диаметрлік жазықтықпен қимасы үлкен дөңгелек береді (89-сурет).

Сфераны жазықтықпен қиғанда пайда болған кез келген қиманың шеңбер болатынын және бұл шеңбердің центрі сфераның центрінен қиюшы жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың табаны болып табылатынын (90-сурет) дәлелдеуге болады.



90-сурет

## 11.3 Сфераға (шарға) жанама жазықтықтар

Біз шеңберге жүргізілген жанама мен оның қасиеттерін білеміз.

Жазықтық пен шардың (сфераның) өзара орналасу жағдайларының ішінде шар мен сфераға жанама жазықтық туралы түсінік кездеседі.

**17-анықтама**. *Шарға (сфераға)* ***жанама жазықтық*** *деп шармен (сферамен) ортақ тек бір ғана нүктесі бар жазықтықты атайды.*

Ортақ нүкте *жанасу нүктесі* деп аталады. Біз *жазықтық* пен *сфера (шар) осы нүктеде жанасады* деп айтатын боламыз.

91-суретте $\alpha$ жазықтығы мен сфера $A$ нүктесінде жанасып тұр.

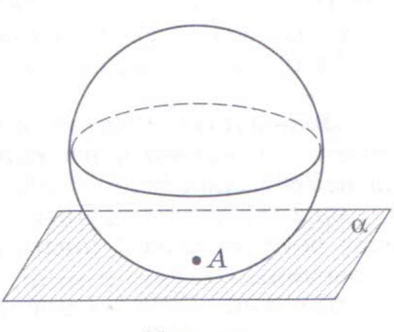
Сфераға жанама жазықтықты бейнелеу кезінде сұрақтар туындайды.

91-суреттегі жанасу нүктесі шар контурына жата ма, жатпай ма?

Үстел бетінде жатқан шарға үстінен қарасақ, біз жанасу нүктесін көре алмаймыз. Сондықтан жанасу нүктесін шар контурының ішіндегі нүктемен — $A$ нүктесімен бейнелейміз (91-сурет).

Әрбір шардың (сфераның) кез келген нүктесінде жанама жазықтық бар болады.

Бұл қорытындыны мына теоремадан аламыз.

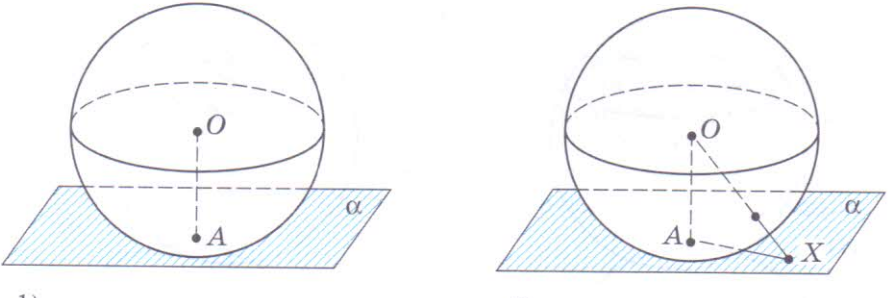


91-сурет

**10-теорема.** ***Шар (сфера) радиусының сыртқы ұшында радиусқа перпендикуляр өтетін жазықтық шарға (сфераға) жанама жазықтық болады*** (92-сурет).

10-теоремаға кері жанама жазықтықтың сфера радиусына перпендикулярлығы туралы теореманы да дәлелдеуге болады. Біз оны дәлелдемесіз келтіреміз.

**11-теорема.** ***Сфераға жанама әрбір жазықтық жанасу нүктесінде радиусқа перпендикуляр болады*** (92-сурет).



1)

2)

92-сурет

## 11.4. Іштей және сырттай сызылған көпжақтар

Геометриялық есептерді шығарғанда біз іштей және сырттай сызылған көпжақтарды қарастырамыз: шарға іштей сызылған призма (куб); кубқа (призмаға) іштей сызылған шар; шарға іштей сызылған пирамида, пирамидаға іштей сызылған шар т. с. с.

Осындай фигуралардың комбинацияларына тоқталайық. Алдымен шарға іштей сызылған көпжақтың анықтамасын береміз.

**18-анықтама.** *Егер көпжақтың барлық төбелері шар бетіне тиісті болса, ондай* ***көпжақ шарға іштей сызылған*** *деп, ал* ***шар көпжаққа сырттай сызылған*** *деп аталады.*

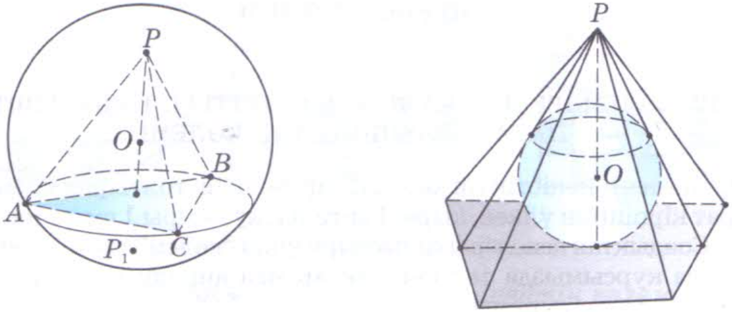
93.1-суретте *PABC* пирамидасының барлық төбелері шар бетінде жатыр, сондықтан пирамида шарға іштей сызылған, ал шар пирамидаға сырттай сызылған.

Енді шарға сырттай сызылған көпжақтың анықтамасын келтірейік.

**19-анықтама.** *Егер көпжақтың барлық жақтары шар бетін жанап тұрса, онда* ***көпжақ шарға сырттай сызылған*** *деп, ал* ***шар көпжаққа іштей сызылған*** *деп аталады.*

93.2-суретте төбесі *P* нүктесіндегі пирамиданың барлық жақтары шар бетін жанайды, сондықтан шар берілген пирамидаға іштей сызылған.

Шардың центрі көпжақтың барлық жақтарынан бірдей қашықтықта орналасқан.



1)　　　　　　　　　　　　2)

93-сурет

1. Сфераның үш нүктесінің бір түзуде жатуы мүмкін бе? Өз ойларыңды түсіндіріп беріңдер.
2. Шеңбер берілген. Осы шеңберді қамтитын қанша сфера жүргізуге болады?
3. Сфераның диаметрі $\sqrt{3}$ -ке тең. а) Егер нүкте центрден $\sqrt{2}$ қашықтықта; ә) центрден 0,85 қашықтықта орналасса, нүктенің сфераның ішінде немесе сыртында орналасқанын анықтаңдар.
4. а) Берілген екі нүкте арқылы; ә) берілген үш нүкте арқылы әр түрлі қанша сфера жүргізуге болады?
5. Радиусы 15-ке тең сфераның центрінен 9-ға тең қашықтықта хорда өтеді. Хорданың ұзындығы қаншаға тең?
6. Ұзындығы 12 см хорда сфераның центрінен 6 см қашықтықта өтеді. Сфераның радиусын табыңдар.
7. Радиусы 2 см болатын шардың үлкен дөңгелегінің ауданын және экваторының ұзындығын табыңдар.
8. Радиусы 25 дм-ге тең шар центрден 5 дм қашықтықта өтетін жазықтықпен қиылған. Қиманың ауданын табыңдар.
9. Шардың диаметрі 38 дм, ал жазықтық шар центрінен 20 дм қашықтықта өтеді. Жазықтық пен шардың ортақ нүктелері бола ма?
10. $M$ және $N$ нүктелері радиусы 50 см шардың бетінде жатады. Егер $MN$ кесіндісінің ұзындығы 80 см болса, шар центрінен $MN$ кесіндісіне дейінгі қашықтық неге тең?
11. Қабырғалары 10 см болатын теңқабырғалы үшбұрыштың төбелері радиусы 10 см шардың бетінде жатыр. Шар центрінен үшбұрыш жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
12. Қабырғасы 8 см, бұрышы $60^\circ$-қа тең ромб қабырғалары сфераны жанайды. Сфераның радиусы 4 см. Сфера центрінен ромб жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
13. Сфераның радиусы 9 см-ге тең. Радиустың ұшы арқылы сфераға жанама жазықтық жүргізілген. Центрі жанасу нүктесінде болатын, нүктелері сфера центрінен 41 см қашықтықта жатқан шеңбердің ұзындығын табыңдар.
14. Қыры 10 см кубқа іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.
15. Өлшемдері 6 дм, 8 дм және 5 дм болатын параллелепипедке сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.
16. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың бүйір қыры $b$-ға тең және ол табан жазықтығымен $\alpha$ бұрыш жасайды. Пирамидаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

# III тарау. КӨЛЕМ

## § 12. КӨЛЕМДЕРДІҢ ЖАЛПЫ ҚАСИЕТТЕРІ. ТІКБҰРЫШТЫ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДТІҢ КӨЛЕМІ

Әрбір дене кеңістіктің белгілі бір бөлігін толтырады, мысалы, ғимарат кірпіштен үлкен, қыры 1 м-ге тең куб қыры 1 см-ге тең кубтан үлкен. Сондықтан денелерді салыстыру үшін "көлем" түсінігі енгізіледі.

Біз өз курсымызда тек көпжақтар мен айналу денелерінің ғана көлемдерін қарастырамыз.

Бұл параграфта біз куб пен тікбұрышты параллелепипедтің көлемдерімен танысамыз.

Көлем де жазық фигуралардың ауданы сияқты шамалардың бірі және оның мынадай негізгі қасиеттері болады:

1. *Әрбір фигураның оң санмен өрнектелетін көлемі бар.*

2. *Тең фигуралардың көлемдері де тең.*

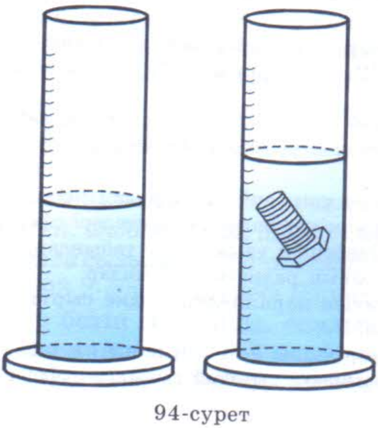
3. *Егер фигура ортақ нүктелері жоқ бірнеше бөлікке бөлінсе, онда жалпы көлем бөліктердің көлемдерінің қосындысына тең.*

Көлемді өлшеудің әр түрлі тәсілдері бар. Мысалы, кішігірім тетіктердің көлемдерін өлшеу үшін бөліктері бар мензурка қолданылады (94-сурет), ал шелектің көлемін көлемі белгілі ыдыспен су толтырып анықтауға болады. Бірақ осы әдіспен бөлменің немесе домна пештерінің көлемдерін анықтау мүмкін емес.

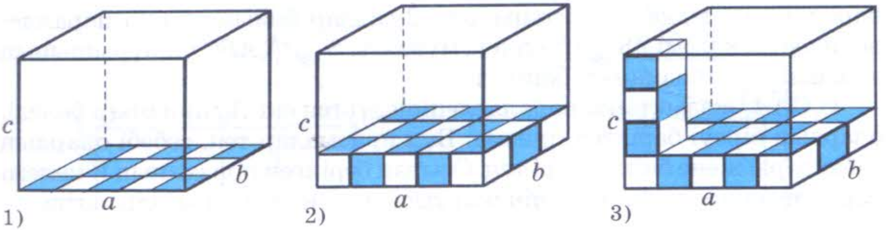
Олардың көлемін алдын ала таңдалған көлемдердің өлшем бірлігінің көмегімен ғана анықтауға болады.

4. *Көлемдердің өлшем бірлігі ретінде қырының ұзындығы e-ге тең (e — кесінділердің ұзындықтарының өлшем бірлігі) кубтың көлемі алынады, ол $e^3$ деп белгіленеді.*

Егер ұзындықтың бірлігі ретінде 1 мм алынса, онда көлемнің бірлігі 1 мм$^3$ (миллиметр куб), ал ұзындықтың бірлігі 1 см болғанда, көлемнің бірлігі 1 см$^3$ (сантиметр куб) болады. Егер ұзындықтың бірлігі 1 м болса, оған сәйкес көлемнің бірлігі 1м$^3$ (метр куб). Сонда кез келген көпжақтың $V$ көлемі осы өлшем бірлігі арқылы $V = \nu e^3$ түрінде өрнектеледі, мұндағы $\nu$ — көлемнің таңдап алынған өлшем бірлігіндегі сан мәні. Алдағы уақытта көлемнің өлшем бірлігі таңдап алынды деп есептеп, оның сан мәні туралы сөз етеміз. Көлемдерді өлшеу үшін барлық көпжақтарға және басқа да Ф фигураларға жоғарыда аталған қасиеттерге ие болатын белгілі бір $V(\Phi) > 0$ сандарды сәйкес қоюымыз керек.



94-сурет



1) 2) 3)

95-сурет

**12-теорема.** ***Тікбұрышты параллелепипедтің көлемі оның үш өлшемінің көбейтіндісіне тең.***

Теореманы тікбұрышты параллелепипедтің үш өлшемі бүтін $a$, $b$ және $c$ (бірдей сызықтық бірліктерде) сандарымен өрнектелген жағдай үшін дәлелдейік.

Дәлелдеу. Берілген параллелепипедтің табандарының қабырғалары $a$ және $b$ бүтін сандарымен өрнектелсе, онда параллелепипедтің табанын $a \cdot b$ квадраттарға бөлуге болады (95.1-сурет).

$a \cdot b$ квадраттардың әрқайсысының үстіне қыры бір бірлікке тең кубтарды қоюға болады. Сонда биіктігі бір сызықтық бірлікке тең, $a \cdot b$ бірлік кубтардан тұратын қабат аламыз (95.2-сурет). Биіктігі $c$-ға тең болғандықтан, берілген параллелепипедті толтыратын мұндай қабаттар саны $c$ -ға тең (95.3-сурет).

Сондықтан берілген параллелепипедтің көлемі $V=a \cdot b \cdot c$-ға тең.

$$\boxed{V_{\text{тікбұр. парал}}=a\cdot b\cdot c,}$$

мұндағы $a$, $b$, $c$ — тікбұрышты параллелепипедтің өлшемдері.

**1-салдар.** ***Қыры $a$-ға тең кубтың көлемі $a^3$ болады, яғни***

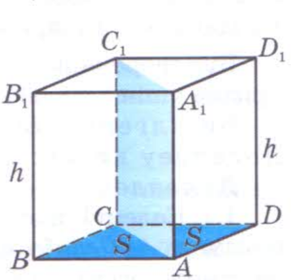
$$V_{\text{куб}}=a^3,$$

мұндағы $a$ — кубтың қыры.

**2-салдар.** ***Тікбұрышты параллелепипедтің көлемі оның табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең.***

Қырлары $a$ мен $b$-ға тең параллелепипедтің жағын табан етіп алайық. Сонда табанының $S$ ауданы $a \cdot b$, ал параллелепипедтің $h$ биіктігі $c$-ға тең. Осыдан

$$V=a\cdot b\cdot c=S\cdot h.$$



96-сурет

**13-теорема.** ***Табаны тікбұрышты үшбұрыш болатын тік призманың көлемі табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең.***

Дәлелдеу. Табаны $ABC$ ($\angle B$ — тікбұрыш) болатын берілген үшбұрышты тік призманы 96-суретте көрсетілгендей тік параллелепипедке толықтырайық. 2-салдар бойынша бұл параллелепипедтің көлемі $2S_{ABC} \cdot h$-қа тең, мұндағы $S_{ABC}$ — $ABC$ үшбұрышының ауданы, $h$ — призманың биіктігі.

$C_1CAA_1$ жазықтығы параллелепипедті тең екі тік призмаға бөледі, олардың біреуі берілген призма. Бұл призмалар тең, себебі олардың табандары және биіктіктері тең. Осыдан берілген призманың $V$ көлемі параллелепипедтің көлемінің жартысына тең екені шығады, яғни

$$V = \frac{1}{2}(2 \cdot S_{ABC} \cdot h) = S_{ABC} \cdot h \,.$$

Дәлелдеу керегі де осы болатын.

**?!**

1. Егер кубтың қырын а) 3 есе ұзартса; ә) 2 есе қысқартса, онда оның көлемі қалай өзгереді?
2. Өлшемдері 30 см × 30 см × 30 см болатын тіктөртбұрышты бак сумен толтырылған. Оған қанша литр су сыяды?
3. Табан қабырғалары $a$ және $b$, ал биіктігі $H$ болатын тікбұрышты параллелепипедтің көлемін табыңдар. Есептеуді а) $a = \sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{5}$, $H = \sqrt{10}$; ә) $a = 2\sqrt{3}$, $b = 5\sqrt{2}$, $H = \sqrt{6}$ үшін жүргізіңдер.
4. Диагональдары $2\sqrt{3}$ см болатын кубтың көлемін табыңдар.
5. Тікбұрышты параллелепипедтің өлшемдері 8 см, 12 см және 18 см. Оған тең шамалас кубтың қырын табыңдар.
6. Тікбұрышты параллелепипед пішіндес кірпіштің өлшемдері 25 см, 12 см және 6,5 см. Кірпіштің тығыздығы 1,8 г/см$^3$. Кірпіштің массасын табыңдар.
7. Егер $\angle ABC = 90^\circ$, $AC = 17$ см, $AB = 15$ см, $AA_1 = 10$ см болса, онда $ABCA_1B_1C_1$ тік призманың көлемін табыңдар.

## § 13. ТІК ПРИЗМАНЫҢ ЖӘНЕ ПИРАМИДАНЫҢ КӨЛЕМДЕРІ

### 13.1. Тік призманың көлемі

**14-теорема.** ***Тік призманың көлемі оның табаны мен биіктігінің көбейтіндісіне тең, яғни***

$$\boxed{V_{\text{тік призма}} = S \cdot H,}$$

мұндағы $S$ — тік призманың табанының ауданы, $H$ — биіктігі.

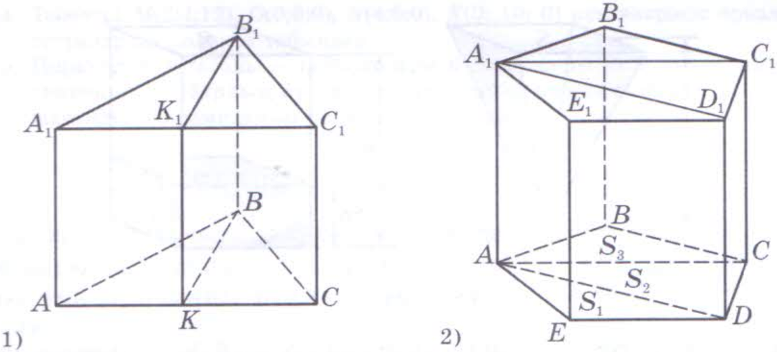
Бұл теореманы үшбұрышты тік призма, одан кейін кез келген тік призма үшін дәлелдейміз.

Берілгені: $ABCA_1B_1C_1$ үшбұрышты тік призма (97.1-сурет).
Дәлелдеу керек: $V = S_{ABC} \cdot H$.

Дәлелдеу.

1.1. Көлемі $V$ және биіктігі $H$ болатын үшбұрышты тік $ABCA_1B_1C_1$ призмада $ABC$ үшбұрышын екі тікбұрышты үшбұрышқа бөлетін етіп биіктік жүргізейік (97.1-суретте $BK$ кесіндісі).

1. 2. $BB_1K$ жазықтығы берілген призманы табандары тікбұрышты $ABK$ және $BKC$ үшбұрыштары болатын екі призмаға бөледі.



1) 2)

97-сурет

1.3. Бұл призмалардың $V_1$ және $V_2$ көлемдері сәйкесінше $S_{ABK}\cdot H$ және $S_{BKC}\cdot H$-қа тең (13-теорема).

1.4. Көлемдердің 3-қасиеті бойынша $V=V_1+V_2$, яғни

$$V= S_{ABK}\cdot H + S_{BKC}\cdot H = (S_{ABK} + S_{BKC})\cdot H.$$

1.5. Сонымен,

$$V= S_{ABC}\cdot H.$$

**2.** Енді теореманы табан ауданы $S$ және биіктігі $H$ болатын кез келген тік призма үшін дәлелдейік. Бұл призманы биіктігі $H$ болатын үшбұрышты тік призмаларға бөлуге болады. Мысалы, 97.2- суретте үш үшбұрышты тік призмаға бөлінген бесбұрышты тік призма кескінделген. Әрбір үшбұрышты призманың көлемін (1) формула бойынша өрнектеп, олардың көлемдерін қосамыз. $H$ ортақ мүшені жақша сыртына шығарсақ, жақша ішінде үшбұрышты призмалардың табан аудандарының, яғни бастапқы призманың табанының ауданы $S$-ті аламыз. Сонымен, бастапқы призманың көлемі $S\cdot H$ көбейтіндісіне тең.

### 13.2. Пирамиданың көлемі

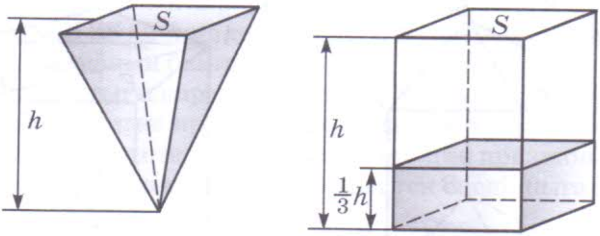
**15-теорема**. ***Пирамиданың көлемі оның табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісінің үштен біріне тең, яғни***

$$V = \frac{1}{3}S\cdot h. \qquad (1)$$

Біз бұл теореманы дәлелдеусіз қабылдаймыз.

Пирамиданың дербес түрлері үшін (1) формуланы тәжірибелік жолмен тексеру оңай.

Табандары және биіктіктері өзара тең пирамида мен тік призма пішіндес ыдыстарды қарастырайық (98-сурет). Егер пирамиданы құммен толтырып, одан кейін оны призма тәріздес ыдысқа құйсақ, пирамиданың көлемі призманың көлемінен 3 есе кіші екенін байқауға



98-сурет

болады. Яғни, пирамиданың табан ауданы $S$, ал биіктігі $h$ болса, онда оның көлемі $V = \frac{1}{3}S \cdot h$ формуласымен анықталады.

(1) формуланың көмегімен, қиық пирамиданың көлемін есептейтін формуланы екі толық пирамиданың көлемдерінің айырымы ретінде шығарып алуға болады.

$$\boxed{V_{\text{қ.пир}} = \frac{1}{3}h \cdot (S + \sqrt{S \cdot S_1} + S_1)\,,}$$

мұндағы $S$ пен $S_1$ — табан аудандары, ал $h$ — қиық пирамиданың биіктігі.

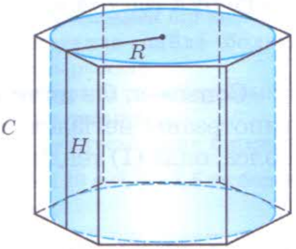
1. Жазбасы бойынша дұрыс пирамиданың ауданын қалай табуға болады?
2. Егер биіктігі $3n$ есе өссе, онда дұрыс пирамиданың көлемі қалай өзгереді?
3. Тік параллелепипедтің диагональдары 8 м және 10 м, табан қабырғалары 5 м және 3 м. Параллелепипедтің көлемін табыңдар.
4. Үшбұрышты тік призманың табанының қабырғалары 12 см, 14 см, 15 см, ал бүйір қыры табанының кіші биіктігіне тең. Призманың көлемін табыңдар.
5. Теміржол табанына төселген топырақтың қимасы трапеция тәрізді. Оның табандары 7 м, 12 м, ал биіктігі 2 м. 100 м төсенішке қанша куб метр топырақ керек?
6. Егер $\angle ACB=30^\circ$, $BC=7$ см, $AC=$ 4 см және ең үлкен бүйір жағының ауданы 28 см$^2$ болса, $ABCA_1B_1C_1$ тік призманың көлемі неге тең?
7. Пирамиданың биіктігі 8 см, ал табаны — қабырғалары 3 см және 7 см-ге тең тіктөртбұрыш. Пирамиданың көлемін табыңдар.
8. Биіктігі 6 см және табаны катеттері 3 см және 4 см-ге тең тікбұрышты үшбұрыш болатын пирамиданың көлемін табыңдар.
9. Биіктігі $h$-қа және табанының диагоналі $d$-ға тең дұрыс төртбұрышты пирамиданың көлемін табыңдар.
10. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың биіктігі 6 см, ал бүйір қыры 10 см. Пирамиданың көлемін табыңдар.
11. Пирамиданың табаны — қабырғалары 18 м және 24 м болатын тіктөртбұрыш. Бүйір қырлары 17 м-ге тең. Пирамиданың көлемін табыңдар.
12. Пирамиданың табаны — қабырғалары 17 м, 17 м және 16 м болатын теңбүйірлі үшбұрыш. Оның барлық бүйір қырлары 20 м-ге тең. Пирамиданың көлемін табыңдар.
13. Табанының ауданы 5,3 га, ал биіктігі 147 м болатын Хеопс пирамидасының көлемін табыңдар.

14. Төбелері $M(2;4;12)$, $O(0;0;0)$, $N(4;0;0)$, $K(0; 10; 0)$ нүктелерінде орналасқан тетраэдрдің көлемін табыңдар.

15. Пирамиданың табаны — қабырғалары 6 см және 10 см болатын теңбүйірлі трапеция, ал барлық бүйір жақтары табан жазықтығымен 60° бұрыш жасайды. Пирамиданың көлемін табыңдар.

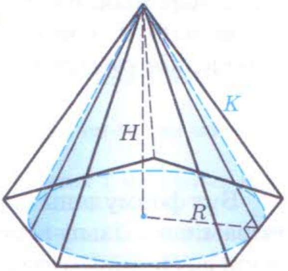
## § 14. ЦИЛИНДР МЕН КОНУСТЫҢ КӨЛЕМІ

*Цилиндрге сыртай сызылған призма* деп табандары цилиндрдің табандарына сырттай сызылған призманы атайды (99-сурет). Цилиндрге сырттай сызылған кез келген призманың биіктігі сол цилиндрдің биіктігіне тең.



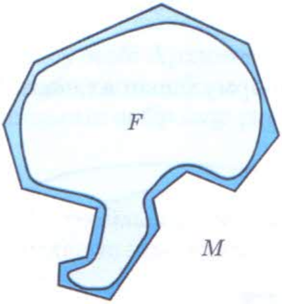
99-сурет

Егер пирамиданың төбесі конустың төбесімен беттессе, ал пирамиданың табаны конустың табан шеңберіне сырттай сызылса, онда *пирамида конусқа сырттай сызылған* деп аталады (100-сурет).



100-сурет

Көпбұрыштардың аудандарын есептеуді білесіңдер. Көпбұрыш болмайтын жазық $F$ фигурасының $S(F)$ ауданын көпбұрышты фигураның ауданына жақындатып есептеуге болады. Егер $M$ көпбұрышы $F$ фигурасын қамтып тұрса, онда оның ауданы $S(M)>S(F)$ (101-сурет). Дегенмен, $S(M)$ мәнін сәл артығымен алынған $S(F)$-тің жуық мәніне тең деуге болады. Практикада кездесетін және біз оқып-үйренетін фигуралар үшін сәйкес $M$ көпбұрышын таңдап алу арқылы $S(M) - S(F)$ айырымын қажетінше азайтуға болады. Сөйтіп, $S(F)$ ауданын кез келген қажетті дәлдікке дейін есептей аламыз.



101-сурет

Осы сияқты көпжақтардың көлемдерін жуықтау арқылы кез келген кеңістіктік фигураның да көлемін есептеп табуға болады.

Цилиндрді оған сырттай сызылған дұрыс призмаға жақындатқан ыңғайлы (99-сурет). Бізге *призманың көлемі табанының ауданын оның биіктігіне көбейткенге тең* екені белгілі. Призма мен цилиндрдің ұқсастығынан *цилиндрдің көлемі де табанының ауданы мен оның биіктігінің көбейтіндісіне тең* деп алуымызға болады. Осы гипотезаның дұрыстығына көз жеткізейік.

Биіктігі $H$, табанының ауданы $S$-ке тең $C$ цилиндрді қарастырайық. Оған сырттай сызылған дұрыс $n$ бұрышты $P_n$ призманың биіктігі де

$H$-қа, ал табанының ауданы $S_n$-ге тең. $n$ саны шексіз өскенде $P_n$ призманың $V_n$ көлемі $C$ цилиндрдің $V_{\text{ц}}$ көлемінен өте аз шамаға ерекшеленеді. Сонымен қатар $S_n$ ауданының $S$ ауданынан айырмасы ескерусіз аз болады.

Сондықтан $S_nH$ санының да $SH$ санынан айырмашылығы аз. Бізге $V_n = S_nH$ екені белгілі. Олай болса, $S_nH$ санынан айырмасы өте аз шамалар болатын $V_{\text{ц}}$ және $SH$ сандарының да айырмашылықтары аз және бұл тек аталған сандар тең болғанда ғана мүмкін:

$$V_{\text{ц}} = SH. \tag{1}$$

Сонымен, біз цилиндрдің көлемі (1) формуламен есептеледі деген гипотезаны негіздедік. Егер цилиндр табанының радиусы $R$-ге тең болса, онда (1) теңдік

$$V_{\text{ц}} = \pi R^2 H$$

түрінде жазылады.

Енді биіктігі $H$ және табанының радиусы $R$-ге тең $K$ конусын қарастырайық. Конустың $V_{\text{к}}$ көлемін есептегенде, оның пирамидамен ұқсастығын ескеріп, *конустың көлемі табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісінің үштен біріне тең* деп аламыз:

$$V_{\text{к}} = \frac{1}{3} SH.$$

Бұл формуланы негіздеу үшін $K$ конусқа сырттай $n$ бұрышты дұрыс пирамида сызып (100-сурет), цилиндрдің көлемін есептеу кезінде жүргізген талқылауларға ұқсас талқылаулар жасаймыз. $S = \pi R^2$ болғандықтан, $V_{\text{к}}$ көлемін есептеу үшін

$$V_{\text{к}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

формуласын аламыз. Қиық конустың көлемін

$$V = \frac{\pi H}{3} (R^2 + R \cdot r + r^2)$$

формуласымен есептейміз. Мұндағы $R$ мен $r$ — қиық конустың табандарының радиустары, $H$ — конустың биіктігі.

**?!**

1. Егер цилиндрдің биіктігі мен табан диаметрін а) 2 есе ұзартса; ә) 2 есе қысқартса, цилиндрдің көлемі қалай өзгереді?
2. Биіктігі 5 см, ал табан радиусы 2 см-ге тең тік дөңгелек цилиндрдің көлемін табыңдар.
3. Бүйір бетінің ауданы $S$-ке, ал жасаушысы $H$-қа тең цилиндрдің көлемін табыңдар.
4. Цилиндр табанының ауданы $S_0$, ал бүйір бетінің ауданы $S$-ке тең. Цилиндрдің көлемін табыңдар.

5. Ұзындығы 4,5 м және диаметрі 1,6 м болатын цистернаны босату үшін ұзындығы 1,5 м және диаметрі 0,8 м болатын қанша бөшке керек?
6. Диаметрі 4 мм болатын алюминий сымның массасы 6,8 кг. Сымның ұзындығын табыңдар (алюминийдің тығыздығы 2,6 г/см$^3$).
7. Мұнайдың тығыздығы 0,85 г/см$^3$ болса, диаметрі 18 м және биіктігі 7 м цилиндр пішіндес цистернаға қанша мұнай сыяды?
8. Биіктігі $H$, табан радиусы $R$ болатын конус берілген. Егер конустың а) биіктігі 2 есе ұзарса, ал табанының радиусы өзгермесе; ә) табан радиусы 3 есе ұзарса, ал биіктігі өзгеріссіз қалса, конустың көлемі қалай өзгереді?
9. Қабырғалары 4 см және 6 см болатын тіктөртбұрыш алдымен бір қабырғасынан, одан соң екінші қабырғасынан айналғанда пайда болған цилиндрлердің көлемдерін табыңдар және салыстырыңдар.
10. Катеттері 3 см және 4 см болатын тікбұрышты үшбұрыш гипотенузасынан айналдырылған. Шыққан айналу денесінің көлемін табыңдар.
11. $V$, $R$ және $H$— цилиндрдің сәйкесінше көлемі, радиусы және биіктігі. а) Егер $R = 2\sqrt{2}$ см, $H=$ 3см болса, $V$-ны; ә) егер $V = 120$ см$^3$, $H$=3,6 см болса, $R$-ді; б) егер $R = H$, $V= 8\pi$ см$^3$ болса, $H$-ты табыңдар.
12. Диаметрі 18 м, ал биіктігі 7 м болатын цилиндр пішінді цистернаға қанша (тоннамен) мұнай сыйғызуға болады? Мұнайдың тығыздығы 0,85 г/см$^3$ деп аламыз.
13. $H$, $R$ және $V$ — конустың сәйкесінше биіктігі, радиусы және көлемі. а) Егер $H=$ 3см, $R=$ 1,5 см болса, көлемді; ә) егер $R =$ 4см, $V= 48\pi$ см$^3$ болса, биіктікті; б) егер $H = m$, $V = p$ болса, радиусты табыңдар.
14. Конустың биіктігі 12 см, ал оның көлемі $324\pi$ см$^3$. Конус табанының радиусын табыңдар.
15. Осьтік қимасының ауданы 60 см$^2$, ал жасаушысы 13 см-ге тең конустың көлемін табыңдар.
16. Табандарының диаметрлері 0,8 м және 1,9 м, ал биіктігі 1 м болатын қиық конус тәрізді ыдысқа қанша су сыяды?
17. Салмағы 977 г, табанының диаметрлері 12 см және 15 см, ал жасаушысының ұзындығы 6 см-ге тең қиық конус тәрізді тетіктің тығыздығын табыңдар.

## § 15. ШАРДЫҢ КӨЛЕМІ ЖӘНЕ СФЕРАНЫҢ АУДАНЫ

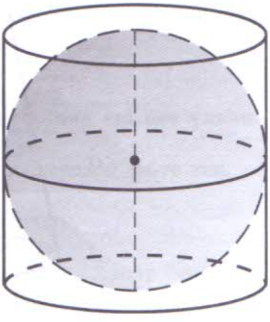
Шардың көлемі мен сфера бетінің ауданын өлшеу есебі Архимедтің "Шар мен цилиндр туралы" деген еңбегінде шешімін тапқан болатын. Дәлелдеген теоремасын Архимед былайша баяндаған: *әрбір шар үшін табаны осы шардың үлкен дөңгелегіне тең, ал биіктігі шардың диаметріне тең цилиндр осы шардан бір жарым есе үлкен және оның бетінің ауданы да шар бетінен бір жарым есе үлкен болады* (102-сурет).

Сонымен, Архимедтің айтуынша, ***радиусы R-ге тең шардың көлемі***:

$$V_{ш} = \frac{2}{3}(\pi R^2 \cdot 2R),$$

немесе

$$V_{ш} = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad (1)$$



102-сурет

формуласымен, ал оның беті (**сфераның ауданы**)

$$S_{\text{ш}} = \frac{2}{3}(2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2),$$

яғни

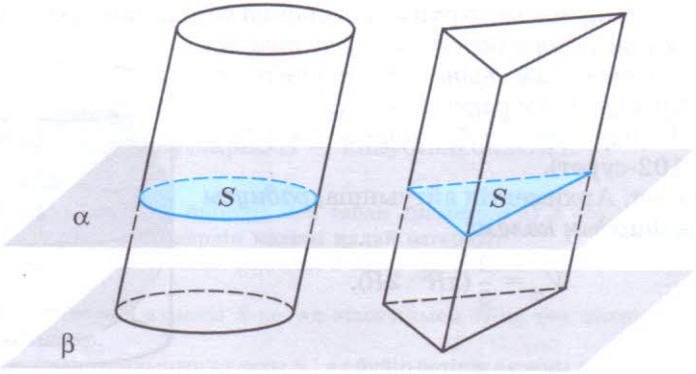
$$S_{\text{ш}} = 4\pi R^2 \tag{2}$$

формуласымен есептеледі.

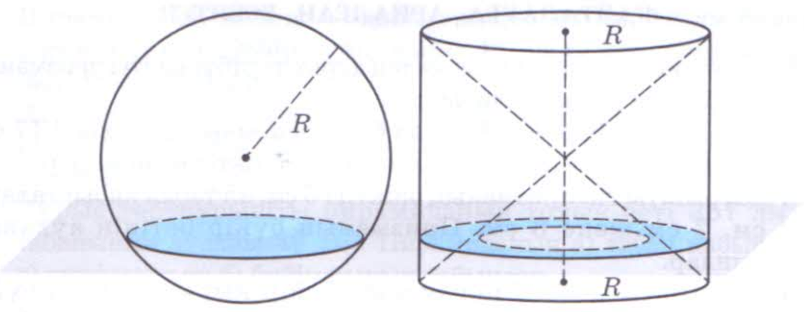
(1) формуланы Архимед әдісімен қорытып шығару күрделі және баяндалуы ұзақ болғандықтан, біз (1) теңдікті негіздеуде XVII ғ. италиялық математик Бонавентура Кавальери (1598—1647) ұсынған принципті қолданамыз. Бұл принцип былай оқылады: *бір жазықтықта орналасқан екі дененің бірін берілген жазықтыққа параллель әрбір жазықтық қиып өткенде екіншісін де қиып өтсе және берілген денелерде пайда болған қималардың аудандары тең болса, онда берілген денелердің көлемдері тең болады* (103-сурет).

> Бұл принциптің негіздемесі барлық қисық сызықты фигуралардың аудандары мен көлемдер теориясы сияқты XVII ғ. Исаак Ньютон (1643—1727) мен неміс ғалымы Готфрид Лейбниц (1646—1716) құрған интегралдық есептеулер теориясында беріледі. Архимед өз теоремаларын дәлелдеудегі ойлары бойынша интегралдық есептеулер әдісінен 2000 жылға озық тұрды.
>
> Архимед өзінің ашқан осы формулаларын аса мақтаныш етті және оның өсиеті бойынша құлпытасына цилиндрге іштей сызылған шар бейнеленді, олардың көлемдерінің қатынасы 3 : 2 қатынасына тең екені жазылды.

Кавальери принципіне сүйеніп радиусы $R$-ге тең шардың көлемі, биіктігі $2R$, табан радиусы $R$-ге тең $C$ цилиндрден 104-суретте бейнелендей екі конусты ойып алып тастағанда қалған цилиндр бөлігінің көлеміне тең екенін дәлелдеуге болады. Шындығында, боялған қималардың (дөңгелек пен сақинаның) аудандарының теңдігін оңай дәлелдеуге болады. Сондықтан радиусы $R$ шардың $V$ көлемі $C$ цилиндр-



103-сурет



104-сурет

дің көлемінен табан радиусы да, биіктігі де $R$-ге тең конустың екі еселенген көлемін шегергенге тең, яғни

$$V_{\text{ш}} = \pi R^2 \cdot 2R - \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3}\pi R^3 . \qquad (1)$$

Сонымен, (1) теңдікті шығарып алдық.

Шар көлемін есептеудің (1) формуласын білгеннен кейін сәйкес сфераның ауданын есептеу формуласын (2) шығарып алу да қиын емес:

$$S = 4\pi R^2. \qquad (2)$$

?!

1. Егер шардың радиусын а) 2 есе ұзартса; ә) 3 есе қысқартса, шардың көлемі қалай өзгереді?
2. а) Көлемді екі есе арттыру; ә) 5 есе кеміту үшін шар радиусын қалай өзгерту керек?
3. Кубқа іштей сызылған шардың көлемі куб көлемінің қандай бөлігіне тең болады?
4. Радиусы 20 см-ге тең қорғасын шардан радиустары 1 см-ге тең қанша шар құюға болады?
5. Радиусы $R$-ге тең шардың сферасы мен оған концентрлі, радиусы $0{,}9R$-ге тең сфера арасында шардың көлемінің қандай бөлігі орналасады?
6. Радиусы $R$-ге тең тұтас шардан қабырғасының қалыңдығы $0{,}1R$-ге тең қуыс шар дайындалған. Қуыс шардың сыртқы радиусы неге тең?
7. Радиусы 15 см-ге тең қарбызды төрт адамның бөліп жегенін немесе радиусы 20 см қарбызды сегіз адамның бөліп жегенін қалайсыз ба?
8. Жердің диаметрі шамамен Ай диаметрінен 4 есе үлкен. Жер мен Айды шар деп алып, олардың көлемдерін салыстырыңдар.
9. Диаметрі 6 см болатын шардың көлемін табыңдар.
10. Шардың көлемі 36 дм$^3$. Оның радиусын табыңдар.
11. Бір қарбыздың диаметрі екінші қарбыздың диаметрінен екі есе үлкен. Бірінші қарбыз екінші қарбыздан неше есе ауыр?
12. Шар центрінен 8 см қашықтықта өтетін қиманың радиусы 6 см-ге тең. Шардың көлемін табыңдар.
13. Диаметрі 12 см болатын шар бетінің ауданын табыңдар.
14. Сфераның ауданы 3,14 дм$^2$. Оның радиусын табыңдар.
15. Диаметрі 8 см-ге тең бір шар және диаметрі 2 см-ге тең 12 шар берілген. Олардың қайсысын никельдеуге көп материал кетеді?
16. Кубқа іштей және сырттай сызылған сфералардың аудандарының қатынасын табыңдар.

## ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЕСЕПТЕР

1. Бір жағының ауданы 11 дм$^2$-ге тең дұрыс төртбұрышты призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.
2. Табанының қабырғасы 8 см, ал бүйір жағының диагоналі 17 см-ге тең дұрыс төртбұрышты призманың биіктігін табыңдар.
3. Үшбұрышты тік призманың биіктігі 3 см, ал табан қабырғалары 3 см, 7 см және 8 см. Призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.
4. Үшбұрышты көлбеу призманың бүйір қыры 6 см, ал бүйір қырларының арақашықтығы 9 см, 10 см, 5 см. Призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.
5. Алтыбұрышты дұрыс призманың бүйір беті 288 дм$^2$, ал бүйір жағының диагоналі 10 дм. Призманың биіктігін және табан қабырғасын табыңдар.
6. Дұрыс төртбұрышты призманың толық бетінің ауданы 102 дм$^2$, ал бүйір бетінің ауданы 84 дм$^2$. Призманың биіктігін табыңдар.
7. Көлбеу призманың бүйір қыры табан жазықтығымен 30° бұрыш жасайды. Бүйір қыры 22 см. Оның биіктігін табыңдар.
8. Кубтың қарама-қарсы екі қыры арқылы қима жүргізілген. Оның ауданы $25\sqrt{2}$ см$^2$-ге тең. Кубтың бүйір жағының диагоналін және қырын табыңдар.
9. Кубтың диагоналі $\sqrt{108}$ см. Кубтың қырын табыңдар.
10. Кубтың қыры а) 3 см; ә) 8 см; б) 2 м болса, оның толық бетінің ауданы неге тең?
11. Тікбұрышты параллелепипедтің биіктігі 16 см, ал табанының қабырғалары 5 см, 7 см. Параллелепипедтің бүйір бетінің және толық бетінің аудандарын табыңдар.
12. Егер кубтың толық бетінің ауданы а) 300 см$^2$; ә) 1600 см$^2$; б) 294 см$^2$ болса, оның қырының ұзындығын табыңдар.
13. Егер кубтың бүйір бетінің ауданы а) 196 см$^2$; ә) 484 см$^2$; б) 784 см$^2$ болса, кубтың толық бетін есептеңдер.
14. Тікбұрышты параллелепипедтің үш жағының аудандары сәйкесінше 15 дм$^2$, 36 дм$^2$ және 60 дм$^2$. Оның өлшемдерін табыңдар.
15. Тікбұрышты параллелепипедтің бүйір қыры 12,5 см, ал табаны — ромб. Ромбының диагональдары 10 см және 24 см. Параллелепипедтің толық бетін табыңдар.
16. Тікбұрышты параллелепипедтің үш өлшемінің қатынасы 3 : 5 : 7. Оның толық беті 568 дм$^2$. Осы өлшемдерді табыңдар.
17. Пирамиданың табаны — теңбүйірлі үшбұрыш. Оның биіктігі 18 дм, ал табаны 16 дм. Әрбір бүйір қыры 20 дм-ге тең. Пирамиданың биіктігін табыңдар.

18. Пирамиданың табаны — қабырғалары 24 дм, 18 дм болатын тіктөртбұрыш. Әрбір бүйір қыры 17 дм-ге тең. Пирамиданың биіктігін табыңдар.

19. Дұрыс төртбұрышты пирамида табанының ауданы 100 $см^2$. Бүйір қыры 13 см-ге тең. Пирамиданың апофемасын және бүйір бетінің ауданын табыңдар.

20. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың толық беті 357 $дм^2$, ал табанының ауданы 49 $дм^2$. Пирамиданың а) табан қабырғасын; ә) апофемасын; б) бүйір қырын табыңдар.

21. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың табан қабырғасы $12\sqrt{2}$ дм, ал бүйір қыры 15 дм. Оның биіктігінің ортасы арқылы табанына параллель қиюшы жазықтық жүргізілген. Қиманың ауданын табыңдар.

22. Үшбұрышты дұрыс пирамиданың табанының қабырғасы 26 дм. Бүйір қабырғасының ортасы арқылы табанына параллель қиюшы жазықтық жүргізілген. Қиманың ауданын табыңдар.

23. Үшбұрышты дұрыс пирамиданың табанының қабырғасы 14 дм, ал бүйір қабырғасы табан жазықтығымен $45^\circ$ бұрыш жасайды. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

24. Пирамиданың биіктігі 13 м-ге тең. Табанының ауданы 576 $м^2$. Егер қиманың ауданы 144 $м^2$ болса, онда ол табанынан қандай қашықтықта өтеді?

25. Пирамиданың табаны — диагональдары 24 см, 18 см болатын ромб. Пирамиданың биіктігі диагональдардың қиылысу нүктесіне түседі және 11 см-ге тең. Диагональдық қималардың аудандарын табыңдар.

26. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табан қабырғасы 12 см, бүйір қыры табан жазықтығымен $45^\circ$ бұрыш жасайды. Диагональдық қималардың аудандарын табыңдар.

27. Цилиндрдің радиусы 6 см, ал биіктігі 9 см. Цилиндрдің осьтік қимасының диагоналін табыңдар.

28. Цилиндрдің радиусы 12 см, осьтік қимасының диагоналі 30 см. Цилиндрдің а) биіктігін; ә) осьтік қимасының ауданын; б) бүйір бетінің ауданын; в) толық бетінің ауданын табыңдар.

29. Тіктөртбұрыштың қабырғалары 7 см және 9 см. Оның үлкен қабырғасынан айналғанда шыққан дененің толық бетін табыңдар.

30. Цилиндрдің бетінің және бүйір бетінің аудандары сәйкесінше $68\pi$ $см^2$, $50\pi$ $см^2$. Цилиндрдің радиусын, биіктігін табыңдар.

31. Радиусы 6 см, ал биіктігі 10 см болатын цилиндр берілген. Осьтен 4 см қашықтықта оған параллель қима жүргізілген. Қиманың ауданын және периметрін табыңдар.

32. Цилиндрдің биіктігі 15 см, радиусы 13 см. Оське параллель және одан 12 см қашықтықта өтетін қиманың ауданын табыңдар.

33. Цилиндрдің радиусы 10 см, ал биіктігі 7 см. Цилиндрге өзара параллель және оське параллель екі қима жүргізілген. Олардың аудандары сәйкесінше 112 $см^2$ және 84 $см^2$. Қималардың арақашықтығын табыңдар.

34. Цилиндрдің радиусы 6 дм, биіктігі 10 дм. Табанына перпендикуляр және табан шеңберінен $120^\circ$ доға қиып өтетін жазықтықпен цилиндрді қиғанда пайда болған қиманың ауданын табыңдар.

35. Қыры 3 м-ге тең кубтың сыртын бояу үшін қанша сыр керек? 1 $м^2$-ге 200 г сыр кетеді деп аламыз.

36. Табанының қабырғасы 1,4 м, ал биіктігі 2,5 м болатын дұрыс алтыбұрышты призма пішіндес бункерді дайындау үшін қанша темірқаңылтыр қажет?

37. Ұзындығы 6 м және диаметрі 24 см болатын құбыр дайындау үшін қанша қаңылтыр қажет?

38. Конустың биіктігі 40 см, радиусы 9 см. Конустың жасаушысын табыңдар.

39. Конустың жасаушысы 18 см-ге тең және табан жазықтығымен $60^\circ$ бұрыш жасайды. Конустың биіктігін және табанының радиусын табыңдар.

40. Конустың осьтік қимасы — қабырғасы 12 см-ге тең теңқабырғалы үшбұрыш. Конустың радиусын және биіктігін табыңдар.

41. Конустың табан радиусы 11 дм. Оның осьтік қимасы — тікбұрышты үшбұрыш. Қиманың ауданын табыңдар.

42. Конустың жасаушысы 17 см, биіктігі 8 см. Конус бетінің ауданын табыңдар.

43. Биіктігі 4 м, диаметрі 6 м конус тәріздес шатыр тігу үшін қанша квадрат метр материал керек?

44. Конустың жасаушысы 22 см-ге тең және табан жазықтығымен $60^\circ$ бұрыш жасайды. Конустың а) табанының ауданын; ә) бүйір бетінің ауданын табыңдар.

45. Шелектің табандарының диаметрлері 28 см, 20 см, ал биіктігі 24 см. Оның бүйір бетінің жазбасының өлшемдері қандай? Осындай өлшемді шелекті дайындау үшін қанша $дм^2$ материал қажет?

46. Конустың биіктігі 8 см, жасаушысы 10 см. Осы конустың жасаушысы болатын сектордың бұрышын табыңдар.

47. Радиусы 37 см-ге тең сфераның хордасы центрден 12 см қашықтықта өтеді. Хорданың ұзындығы қандай?

48. Ұзындығы 20 см-ге тең хорда сфера центрінен 24 см қашықтықта өтеді. Сфераның радиусын табыңдар.

49. Шардың радиусы 0,6 дм болса, шардың үлкен дөңгелегінің ауданын, экватордың ұзындығын табыңдар.

50. Радиусы 25 дм-ге тең шар центрден 15 дм қашықтықта өтетін жазықтықпен қиылған. Қиманың ауданын табыңдар.

51. Шардың диаметрі 43 дм, ал жазықтық центрден 17 дм қашықтықта өтеді. Бұл жазықтық пен шардың ортақ нүктелері бола ма?

52. $P$ және $Q$ нүктелері радиусы 130 см-ге тең шар бетінде жатады. Егер $PQ$ кесіндісінің ұзындығы 100 см-ге тең болса, шар центрінен кесіндіге дейінгі қашықтықты табыңдар.

53. Қабырғасы 12 см-ге тең теңқабырғалы үшбұрыштың төбелері шар бетінде орналасқан. Шардың радиусы 12 см. Шар центрінен үшбұрыш жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

54. Сфераның радиусы 35 см-ге тең. Оның ұшынан сфераға жанама жазықтық жүргізілген. Центрі жанасу нүктесінде болатын шеңбердің ұзындығын табыңдар. Сфера центрінен шеңбер нүктелеріне дейінгі қашықтық 37 см.

55. Егер кубтың диагоналі $5\sqrt{3}$ см болса, кубтың көлемін табыңдар.

56. Тікбұрышты параллелепипедтің өлшемдері 10 см, 40 см және 20 см. Көлемі осы параллелепипедтің көлеміне тең куб қырының ұзындығын табыңдар.

57. Тікбұрышты параллелепипед тәрізді кірпіштің өлшемдері 25 см, 10 см және 5,5 см. Кірпіштің тығыздығын 1,8 г/см$^3$ деп алып, оның массасын анықтаңдар.

58. Егер $\angle ABC = 90^\circ$, $AC = 20$ см, $AB = 16$ см, $AA_1 = 9$ см болса, $ABCA_1B_1C_1$ тік призманың көлемін табыңдар.

59. Табан қабырғалары 4 см және 11 см-ге тең тіктөртбұрыш болатын, биіктігі 9 см-ге тең пирамиданың көлемін табыңдар.

60. Табаны катеттері 7 см, 10 см-ге тең тікбұрышты үшбұрыш болатын, биіктігі 12 см-ге тең пирамиданың көлемін табыңдар.

61. Үшбұрышты дұрыс пирамиданың биіктігі 12 см, бүйір қыры 13 см. Пирамиданың көлемін табыңдар.

62. Пирамиданың табаны қабырғалары 20 м, 48 м болатын тіктөртбұрыш. Барлық бүйір қырлары 30 м-ге тең. Пирамиданың көлемін табыңдар.

63. Қабырғалары 13 м, 13 м және 10 м болатын теңбүйірлі үшбұрыш пирамиданың табаны болып табылады. Барлық бүйір қырлары 17 м-ге тең пирамиданың көлемін табыңдар.

64. $M(3; 3; 11)$, $O(0; 0; 0)$, $N(5; 0; 0)$, $K(0; 6; 0)$ нүктелері тетраэдрдің төбелері. Тетраэдрдың көлемін табыңдар.

65. Пирамиданың табаны — трапеция. Оның қабырғалары 8 см, 8 см, 8 см, 12 см. Пирамиданың бүйір қырлары табан жазықтығымен $60^\circ$ бұрыш жасайды. Пирамиданың көлемін табыңдар.

66. Цилиндрдің көлемі, радиусы және биіктігі сәйкесінше $V$, $R$, $H$ болсын. Егер а) $R = 3\sqrt{2}$ см, $H = 6$ см болса, $V$-ны; ә) $V = 90$ см$^3$; $H = 3,5$ см болса, $R$-ді; б) егер $R = H$, $V = 24\pi$ см$^3$ болса, $H$-ты табыңдар.

67. Мұнайдың тығыздығы 0,85 г/см$^3$ болса, диаметрі 20 м және биіктігі 6 м цилиндр пішіндес цистернаға қанша мұнай сыяды?

68. Конустың биіктігі, радиусы және көлемі сәйкесінше $H$, $R$ және $V$ болсын. Егер а) $H = 4$ см, $R = 2{,}5$ см болса, $V$-ны; ә) $R = 2$ см, $V = 36\pi$ см$^3$ болса, $H$-ты табыңдар.

69. Конустың биіктігі 18 см, ал көлемі $144\pi$ см$^3$. Конус табанының радиусын табыңдар.

70. Конустың жасаушысы 17 см, осьтік қимасының ауданы 120 см$^2$ болса, көлемін табыңдар.

71. Диаметрі 7 см-ге тең шардың көлемін табыңдар.

72. Шардың көлемі 48 дм$^3$. Оның радиусын табыңдар.

73. Бірінші қарбыздың диаметрі екіншісінің диаметрінен 3 есе үлкен. Бірінші қарбыз екінші қарбыздан неше есе ауыр болады?

74. Шардың центрінен 12 см қашықтықта өтетін жазықтықпен қимасы радиусы 5 см-ге тең дөңгелек болады. Шардың көлемін табыңдар.

75. Диаметрі 9 см-ге тең шар бетінің ауданын табыңдар.

76. Бетінің ауданы $4\pi$ дм$^2$-ге тең сфераның радиусын табыңдар.

77. Диаметрі 6 см-ге тең бір шар және диаметрі 2 см болатын 12 шар берілген. Олардың қайсысын никельдеуге көп материал кетеді?

# Жауаптары

## § 2

**№ 5.** 24 дм$^2$. **№ 6.** 12 см. **№ 7.** 56 см$^2$. **№ 8.** 96 см$^2$. **№ 9.** $(48+8\sqrt{3})$ см$^2$. **№ 10.** 3 дм, 4 дм немесе 4 дм; 3 дм. **№ 11.** $4\sqrt{2}$ дм. **№ 12.** 40,32 м$^2$. **№ 13.** 6 см. **№ 14.** $8\sqrt{2}$ см; 8 см. **№ 15.** 580 см$^2$.

## § 3

**№ 4.** $k^2$ рет. **№ 5.** 6. **№ 6.** 7 см. **№ 7.** 45°. **№ 8.** 4 см. **№ 9.** а) 96 см$^2$; ә) 600 см; б) 6 м$^2$. **№ 10.** а) 144 см$^2$; 216 см$^2$. **№ 11.** 24 см$^2$; 40 см$^2$. **№ 12.** 468 см$^2$. **№ 13.** б) 6 см$^2$. **№ 14.** ә) 486 см$^2$. **№ 15.** 4 дм; 6 дм; 7 дм. **№ 16.** 2,88 м$^2$. **№ 17.** 3 дм; 6 дм; 9 дм.

## § 4

**№ 4.** а) Жоқ; ә) иә; б) жоқ; в) иә; **№ 8.** Жоқ. **№ 9.** 12 см. **№ 10.** 8 см. **№ 11.** $2\sqrt{3}$ см. **№ 12.** $\mathrm{tg}\alpha \approx 0{,}903$. **№ 13.** 9 см. **№ 14.** 1) $(100 + 12\sqrt{89})$ см$^2$; 2) $(220 + 12\sqrt{89})$ см$^2$. **№ 16.** $\frac{d^2}{4}(3\sqrt{15}+\sqrt{3})$. **№ 17.** 12 дм. **№ 18.** $\sqrt{2}$ дм. **№ 19.** 4 см; 48 см$^2$. **№ 20.** 6 дм; 4 дм; 5 дм. **№ 21.** 25 дм$^2$. **№ 22.** $9\sqrt{3}$ дм. **№ 23.** $25\sqrt{15}$ дм$^2$. **№ 24.** 8 м. **№ 25.** 9 см$^2$; 12 см$^2$. **№ 26.** 64 см$^2$; $16\sqrt{15}$ см$^2$.

## § 5

**№ 4.** 48 см$^2$; 122 см$^2$. **№ 5.** 112 см$^2$; 228 см$^2$. **№ 6.** $2\sqrt{2}$ см; 2 см.

## § 6

**№ 5.** Жоқ. **№ 6.** Пирамида мен қиық пирамида.

## § 8

**№ 1.** Шеңбер. **№ 2.** Болады. **№ 3.** 10 м. **№ 4.** $49\pi$ см$^2$. **№ 5.** 5 см; $60\pi$ см$^2$; $132\pi$ см$^2$. **№ 6.** $90\pi$ см$^2$. **№ 7.** $\sqrt{\frac{10}{\pi}}$ см; $\frac{15}{\sqrt{10\pi}}$ см. **№ 8.** $8\sqrt{3}$ см; $(8+4\sqrt{3})$ см. **№ 9.** 256 см$^2$. **№ 10.** 1 см. **№ 11.** 40 дм$^2$.

## § 9

**№ 6.** 17см. **№ 7.** 12 см. **№ 8.** 4 см; $4\sqrt{3}$ см. **№ 9.** 289 дм$^2$. **№ 10.** 300 см$^2$. **№ 11.** $2\sqrt{13}\,\pi$ м$^2$. **№ 12.** а) $49\,\pi$ м$^2$; ә) $98\pi$ м$^2$. **№ 13.** 210°.

## § 10

**№ 2.** $544\,\pi + 16\sqrt{73}\,\pi$. **№ 3.** а) 12 см; ә) 170 см$^2$; б) $\sin\varphi = \frac{12}{13}$. **№ 4.** 320 г. **№ 5.** $\frac{4}{9}\pi$ м$^2$.

## § 11

**№ 1.** Жоқ. **№ 2.** Шексіз аз. **№ 3.** а) Сферадан тыс; ә) сфераның ішінде. **№ 5.** 24. **№ 6.** $6\sqrt{2}$ см. **№ 7.** $4\pi$ см$^2$; $4\pi$ см. **№ 8.** $600\pi$ дм$^2$. **№ 9.** Болмайды. **№ 10.** 30 см. **№ 11.** $10\frac{\sqrt{6}}{3}$ см. **№ 12.** 2 см. **№ 13.** $80\pi$ см.

## § 12

**№ 1.** а) 9 есе артады; ә) 8 есе кемиді. **№ 2.** 27л. **№ 3.** 30 куб бірл. **№ 4.** 8 см$^3$. **№ 5.** 12 см. **№ 6.** 3,51 кг. **№ 7.** $V = 600$ см$^3$.

## § 13

**№ 4.** 716,8 см$^3$. **№ 5.** 1900 м$^3$. **№ 8.** 12 см$^3$. **№ 9.** $\frac{1}{6}d^2 \cdot h$. **№ 10.** $96\sqrt{3}$ см$^3$. **№ 13.** 2 548 000 м$^3$. **№ 14.** 80 куб бірл.

## § 14

**№ 5.** 12 бөшке. **№ 6.** 208,2 м. **№ 10.** 2,4 куб бірл. **№ 11.** а) 24 $\pi$ см$^3$; ә) $\frac{10}{\sqrt{3\pi}}$ см; б) 2 см. **№ 13.** а) 2,25 $\pi$ см$^2$; ә) 9 см; б) $\frac{\sqrt{3p}}{\sqrt{\pi m}}$. **№ 14.** 9 см. **№ 15.** 240 $\pi$ см$^3$ немесе 100$\pi$ см$^3$. **№ 16.** ≈ 1,5 м$^3$. **№ 17.** ≈ 3,4 г/см$^3$.

## § 15

**№ 8.** 36$\pi$ см$^3$. **№ 9.** $\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$ дм. **№ 11.** $\frac{4000\pi}{3}$ см$^3$. **№ 15.** 1:2.

## Қайталауға арналған есептер

**2.** 15 см. **3.** 54 см. **5.** 6 дм; 8 дм; 8 дм; 6 дм. **7.** 11 см. **9.** 6 см. **10.** а) 54 см$^2$; ә) 384 см$^2$; б) 24 см$^2$. **11.** 384 см$^2$. 454 см$^2$. **12.** а) $5\sqrt{2}$ см; ә) $\frac{20\sqrt{6}}{3}$ см; б) 7 см. **13.** а) 7 см; ә) 11 см; б) 14 см. **14.** $a = 5$ дм, $b = 3$ дм; $c = 12$ дм. **15.** 710 см$^2$. **16.** 6 дм; 10 дм; 14 дм. **18.** 8 дм. **22.** $\frac{81\sqrt{3}}{4}$ дм$^2$. **24.** 6,5 м. **27.** 15 см. **34.** $60\sqrt{3}$ дм$^2$. **35.** 10,8 кг. **36.** ≈ 31 м$^2$. **37.** ≈ 4,5 м$^2$. **45.** ≈ 20 дм$^2$. **47.** 70 см. **48.** 26 см. **52.** 120 см. **54.** 24$\pi$. **60.** 140 см$^2$.

# МАЗМҰНЫ

*Учебное издание*

**Гусев Валерий Александрович**
**Кайдасов Жеткербай**
**Кагазбаева Аспет Кенесбековна**

**ГЕОМЕТРИЯ**

Учебник для 11 классов общественно-гуманитарного направления
общеобразовательных школ

Третье издание, переработанное, дополненное

(*на казахском языке*)

Редакторы *Ж. Баданова*
Көркемдеуші редакторы *Ж. Болатаев*
Техникалық редакторы *И. Тарапунец*
Корректоры *Р. Көшкінова*
Компьютерде беттеген *Л. Жақсылықова*

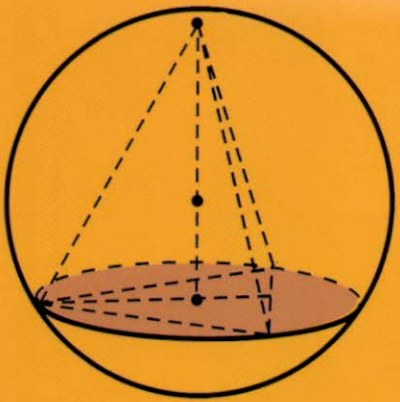
Баспаға Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің
№ 0000001 мемлекеттік лицензиясы 2003 жылы 7 шілдеде берілген

ИБ № 5104

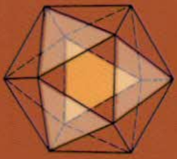
Басуға 19.06.18 қол қойылды. Пішімі $60x90^1/_{16}$. Қаріп түрі "Школьная".
Офсеттік қағаз. Офсеттік басылыс. Шартты баспа табағы 4,50.
Шартты боялы беттаңбасы 17,0. Есептік баспа табағы 4,04.
Таралымы 2 000 дана. Тапсырыс № 523.

**"Мектеп" баспасы, 050009, Алматы, Абай даңғылы, 143**
**Факс.: 8(727) 394-37-58, 394-42-30.**
**Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34.**
**E-mail: mektep@mail.ru**
**Web-site: www.mektep.kz**

Отпечатано в типографии ТОО «Полиграфсервис»
050050, г.Алматы, ул.Зеленая,13 а.



# ГЕОМЕТРИЯ



ISBN 978-601-07-0381-0